Universitetet
i Stavanger

Universitetet i Stavanger

Det Teknisk-Naturvitenskapelige Fakultet

Eksamen i: MAT100 Matematiske metoder 1
Dato: 6. desember, 2018
Tid: 9:00-14:00 (5 timer)
Språk: Norsk, Bokmål
Tillatte hjelpemidler:
K. Rottmann, *Matematisk formelsamling*.
Enkel bestemt kalkulator.
Faglærer: Sigbjørn Hervik, tlf: 41581800

Oppgavesettet består av 6 oppgaver på 3 sider.
Deloppgaver a), b) etc,. vektes likt.

$\infty \quad \infty \quad \infty \quad \infty$

Oppgave 1

a) Gitt $z = 2 + 4i$ og $w = 1 - i$. Regn ut z^2, $w\bar{w}$ og z/w.

b) Skriv $\sqrt{3} - i$ på eksponentiell form og regn ut $(\sqrt{3} - i)^{30}$. Skriv svaret på kartesisk form.

c) Finn alle 4.røttene til $-8 + 8\sqrt{3}i$ og skriv de på kartesisk form.

Oppgave 2

Finn følgende integraler. Utregning må vises!

a) $\displaystyle\int \left(3\sqrt{x} + 2e^{-x}\right) dx.$ b) $\displaystyle\int x^2 \ln x dx.$ c) $\displaystyle\int \frac{\cos x + 1}{\sin x + x} dx.$

d) $\displaystyle\int \frac{5x + 13}{(x+2)^2(x-1)} dx.$ e) $\displaystyle\int \frac{1 + x}{\sqrt{1 - x^2}} dx.$

Oppgave 3

Vi definerer funksjonen f ved:

$$f(x) = 2\tan^{-1}(x) - x,$$

hvor $\tan^{-1}(x)$ er den inverse funksjonen til $\tan x$.

a) Bestem monotoniegenskapene til $f(x)$, og finn alle (lokale) maks- og minimumspunkter.

b) Bestem krumningsegenskapene til $f(x)$, og eventuelle vendepunkt.

c) Vis at $f(x)$ har to skrå asymptoter gitt ved $y = -x + \pi$ og $y = -x - \pi$.

Oppgave 4

a) Ei kurve i planet er gitt implisitt ved

$$xy^3 - 2yx^3 = 4.$$

Punktet $P(1, 2)$ ligger på kurva. Bestem ligningen til tangenten til kurva igjennom punktet P.

b) La $f(x) = x\sqrt{1 - x^2}$, og la D være området under grafen til f, mellom $x = 0$ og $x = 1$.

1) Finn arealet av D.

2) Finn volumet av omdreiningslegmet som fremkommer ved å dreie D om x-aksen.

Oppgave 5

a) Finn den generelle løsningen til den homogene differensialligningen:

$$y'' - 4y' + 5y = 0.$$

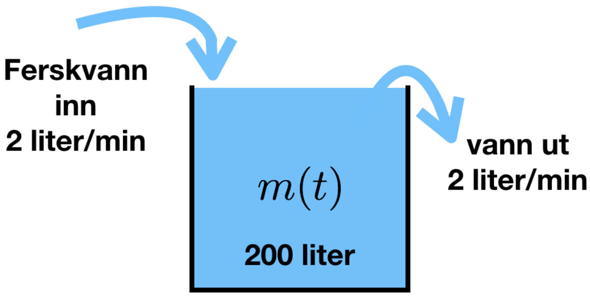
b) Finn den generelle løsningen til den inhomogene differensialligningen:

$$y'' - 4y' + 5y = \sin x.$$

Oppgave 6

Tøffe Terje har et 200 liters kar med saltvann. I saltvannet er det 3,5 % salt (dvs, 35 gram salt per liter saltvann). Dette er litt for mye og Tøffe Terje fyller derfor på med ferskvann (uten salt). Karet rommer ikke mer enn 200 liter så det overskytende vannet renner derfor over kanten. Strømningsraten med ferskvann er 2 liter per minutt, og den samme strømningsraten ut, se figur.

La $m(t)$ (i gram) være totale mengden salt i karet ved tiden t (i minutter) etter Tøffe Terje starter med å fylle på med ferskvann. Vi antar at vannet blandes umiddelbart ut, og vannet som renner over kanten har den samme saltkonsentrasjonen som vannet i karet til enhver tid.



a) Vis at saltmengden $m(t)$ oppfyller initialverdiproblemet:

$$\frac{dm}{dt} = -\frac{m}{100}, \qquad m(0) = 7000.$$

b) Løs initialverdiproblemet fra a). Når er saltkonsentrasjonen 2,0%?

♡ God Jul! ♡