MAT100 Oblig1 2019 Løsninger

Oppgave 1

a)

1)

$$(1+3i)(-1+2i) = -1+2i-3i+3*2*i^2 = -1-i+6*(-1) = -7-i$$

2)

$$\frac{4+7i}{3+2i} = \frac{4+7i}{3+2i}*\frac{3-2i}{3-2i} = \frac{(4+7i)(3-2i)}{(3+2i)(3-2i)} = \frac{12-8i+21i-14i^2}{9-4i^2} =$$

$$\frac{12+13i-14*(-1)}{9-4*(-1)} = \frac{26+13i}{9+4} = \frac{13(2+i)}{13} = 2+i$$

b)

1) Modulus av $u=-3+3i$ er $|u| = \sqrt{3^2+3^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$; da kan skrives

$$u = |u|*e^{i\theta} = |u|*(cos\theta + i*\sin\theta) = |u|*\frac{u}{|u|} = 3\sqrt{2}*\frac{-3+3i}{3\sqrt{2}} = 3\sqrt{2}*(-\frac{1}{\sqrt{2}}+i\frac{1}{\sqrt{2}})$$

Den θ kan regnes ut med f.eks. $\theta = \arccos(-\frac{1}{\sqrt{2}})$ og kommer $\theta = \frac{3}{4}\pi$ da eksponentiell form blir:

$$u = -3+3i = 3\sqrt{2}\,e^{i\frac{3}{4}\pi}$$

2) Det er lignende; modulus av $v=\sqrt{3}+i$ blir $|v| = \sqrt{(\sqrt{3})^2+1^2} = \sqrt{4} = 2$;

$$v = |v|*e^{i\phi} = |v|*(cos\phi + i*\sin\phi) = |v|*\frac{v}{|v|} = 2*\frac{\sqrt{3}+i}{2} = 2*(\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2})$$

Her $\phi = \arccos\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{6}\pi$ derfor exponentiell form skrives:

$$V = \sqrt{3}+i = 2\,e^{i\frac{1}{6}\pi}$$

c)

Den $w=-2+2i$ kan skrives igjen på eksponensjell form; $|w| = \sqrt{(-2)^2+2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.

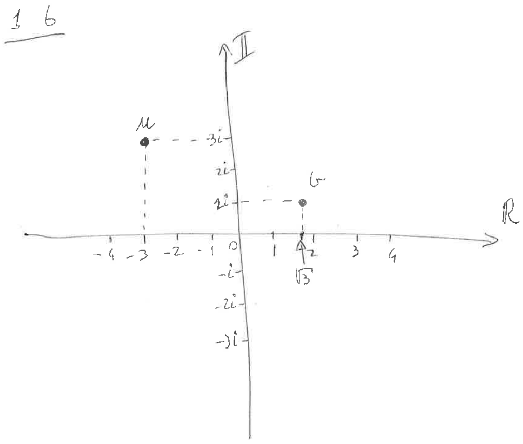
$$w = |w|*e^{i\alpha} = |w|*\frac{w}{|w|} = 2\sqrt{2}*\frac{-2+2i}{2\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}*(-\frac{1}{\sqrt{2}}+i\frac{1}{2})$$

Her kanten blir $\alpha = \arccos(-\frac{1}{\sqrt{2}}) = \frac{3}{4}\pi$, (akkurat som inn i b1)).

$$w = -2+2i = 2\sqrt{2}\,e^{i\frac{3}{4}\pi}$$

Til å regne ur roter: modulus av roter er

$$|w^{\frac{1}{3}}| = |w|^{\frac{1}{3}} = (2\sqrt{2})^{\frac{1}{3}} = (2^{\frac{3}{2}})^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$$



Og som kant av roter α_1 vi har:

$$(e^{i\frac{3}{4}\pi})^{\frac{1}{3}} = e^{(i\frac{3}{4}\pi)*\frac{1}{3}} = e^{i\frac{1}{4}\pi}$$

Plus alle løsninger som kommer fra $3 * (\frac{1}{4}\pi + k) = (\frac{3}{4}\pi) \mod 2\pi$; $k = (0, \frac{2}{3}\pi, \frac{4}{3}\pi)$:

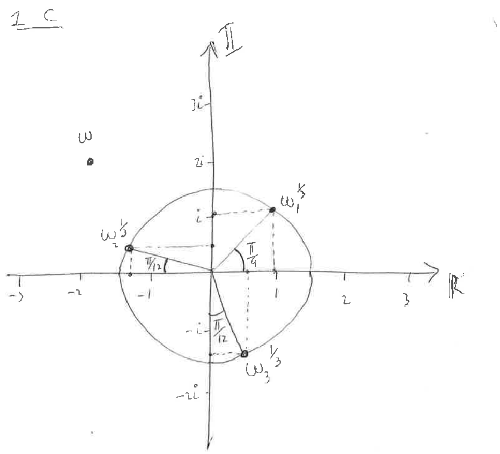
$$\begin{aligned} \alpha_1 =& \frac{1}{4}\pi \\ \alpha_2 =& \frac{1}{4}\pi + \frac{2}{3}\pi = \frac{11}{12}\pi \\ \alpha_3 =& \frac{1}{4}\pi + \frac{4}{3}\pi = \frac{19}{12}\pi \end{aligned}$$

De tre roter derfor:

$$\begin{aligned} w_1^{\frac{1}{3}} =& \sqrt{2}e^{i\frac{1}{4}\pi} \\ w_2^{\frac{1}{3}} =& \sqrt{2}e^{i\frac{11}{12}\pi} \\ w_3^{\frac{1}{3}} =& \sqrt{2}e^{i\frac{19}{12}\pi} \end{aligned}$$

Til å tegne på komplekse plan, raskeste vei er å tegne syrkel med radius $|w| = 2\sqrt{2}$ og tegne kantene direkte; funker også regne ut med kalkulator $(x, y) = (|w| * \cos(\alpha_1), |w| * \sin(\alpha_1))$ osv; Nummeren skal være omtrent:

$$\begin{aligned} w_1^{\frac{1}{3}} =& 1 + i \\ w_2^{\frac{1}{3}} =& -1,366 + 0,366\, i \\ w_3^{\frac{1}{3}} =& 0,366 - 1,366\, i \end{aligned}$$



Oppgave 2

a)

$$|zw| = 3e^{i\frac{\pi}{4}} * e^{-i\frac{\pi}{3}}| = |(3*1)*e^{i\pi(\frac{1}{4}-\frac{1}{3})}| = |(3*1)*e^{i\pi(\frac{1}{4}-\frac{1}{3})}| = |3*e^{-i\frac{\pi}{12}}| = 3$$

$$|zw| = 3+0i$$

b)

$$z^2\bar{w} = (3e^{i\frac{\pi}{4}})^2 * \overline{(e^{-i\frac{\pi}{3}})} = 3^2 * e^{2*i\frac{\pi}{4}} * e^{(-1)*(-i\frac{\pi}{3})} = 9*e^{i\frac{\pi*2}{4}} * e^{i\frac{\pi}{3}} = 9*e^{i\frac{\pi*2}{4}+\frac{\pi}{3}} = 9e^{i\pi\frac{10}{12}}$$

$$z^2\bar{w} = 9*\cos(\pi\frac{10}{12}) + 9i*\sin(\pi\frac{10}{12}) = 9*\cos(\pi(1-1/6)) + 9i*\sin(\pi(1-1/6)) = -9*\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{9}{2}i$$

$$z^2\bar{w} \simeq -7,79 + 4,5\,i$$

c)

$$\frac{z^3}{w^9} = \frac{(3e^{i\frac{\pi}{4}})^3}{(e^{-i\frac{\pi}{3}})^9} = \frac{3^3 * e^{3*i\frac{\pi}{4}}}{1^9 * e^{9*(-i\frac{\pi}{3})}} = \frac{27}{1} * \frac{e^{i\frac{3\pi}{4}}}{e^{-i\frac{9\pi}{3}}} = 27\,e^{i\frac{3\pi}{4}-(-i\frac{9\pi}{3})} = 27\,e^{i\frac{15}{4}\pi}$$

$$\frac{z^3}{w^9} = 27\,e^{i\frac{15}{4}\pi} = 27\,e^{i(2+\frac{7}{4})\pi} = 27\,e^{i(2+2-\frac{1}{4})\pi} = 27\,e^{i\frac{-1}{4}\pi} = \frac{27}{\sqrt{2}} - i\frac{27}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{z^3}{w^9} \simeq 38,18 - 38,18\,i$$

Oppgave 3

a) Funksjon $\frac{2\sin x}{x}$ er definert overalt unntatt $x = 0$; begge $2\sin x$ og $\frac{1}{x}$ er kontinuerlig overalt (untatt $x = 0$) da den komposisjon er kontinuerlig overalt unntatt $x = 0$.

På $x = 0$, den $f(x)$ er fikset med verdi 1; derfor mi må sjekke at grense hos $x = 0$ stemmer; den grense løses med den kjent Sinus:

$$\lim_{x\to 0} \frac{2\sin x}{x} = 2\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 2 * 1 = 2$$
$$2 = \lim_{x\to 0} f(x) \neq f(0) = 1$$

Siden hos $x = 0$ grense og verdi er forskjell, $f(x)$ er ikke kontinuerlig for alle $x \in \mathbb{R}$; det er forstatt kontinuerlig til alle $x \neq 0$.

b) Lignende jobb; $\frac{x^2-6x+8}{x-2}$ er definert overalt unntatt $x = 2$ og er kontinuerlig overalt (unntatt de sammen $x = 2$, hvor er ikke definert).

Må derfor sjekkes hvis på punkt $x = 2$ grense av $g(x)$ stemmer med verdien sin. Grensen her løses med å faktorisere den kvadratsetning og simplifisere bråk:

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-6x+8}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x-4)}{x-2} = \lim_{x\to 2}(x-4) = -2$$
$$2 = \lim_{x\to 2} g(x) = f(2) = 2$$

Her grense og verdi stemmer, da $g(x)$ er kontiuerlig overalt.

Oppgave 4

a)

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x}-1) * (\sqrt{x}+1)} = \lim_{x\to 1} \frac{1}{\sqrt{x}+1} = 1/2$$

b)

$$\lim_{x\to -1} \frac{x^4-1}{x^2-2x-3} = \lim_{x\to -1} \frac{(x^2+1)(x^2-1)}{(x+1)(x-3)} = \lim_{x\to -1} \frac{(x^2+1)(x+1)(x-1)}{(x+1)(x-3)} =$$
$$= \lim_{x\to -1} \frac{(x^2+1)(x-1)}{x-3} = \frac{((-1)^2+1)(-1-1}{-1-3} = 1$$

c)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x^2+4}-2}{x^2+x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x^2+4}-2}{x(x+1)} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x^2+4}-2}{x(x+1)} * \frac{\sqrt{x^2+4}+2}{\sqrt{x^2+4}+2} =$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{(x^2+4)-2^2}{x(x+1) * (\sqrt{x^2+4}+2)} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x(x+1) * (\sqrt{x^2+4}+2)} =$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{x}{(x+1) * (\sqrt{x^2+4}+2)} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{1 * (\sqrt{4}+2)} = 0$$

d)

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x^4+2x^2+1}{3x^4-2x^3+50x-1} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x^4+2x^2+1}{3x^4-2x^3+50x-1} * \frac{\frac{1}{x^4}}{\frac{1}{x^4}} = \lim_{x\to\infty} \frac{2+2\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^4}}{3-2\frac{1}{x}+50\frac{1}{x^3}-\frac{1}{x^4}} = \frac{2}{3}$$

e)

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2-3x}-\sqrt{x^2+1}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2-3x}-\sqrt{x^2+1}\right) * \frac{\sqrt{x^2-3x}+\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2-3x}+\sqrt{x^2+1}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{(x^2-3x)-(x^2+1)}{\sqrt{x^2-3x}+\sqrt{x^2+1}} = \lim_{x\to\infty}\frac{-3x-1}{\sqrt{x^2-3x}+\sqrt{x^2+1}} =$$

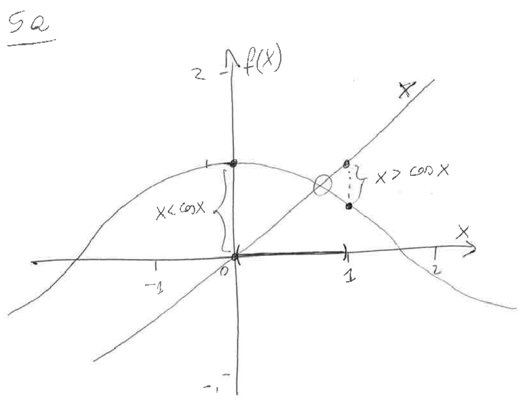
$$= \lim_{x\to\infty}\frac{-3x-1)}{x*\left(\frac{1}{x}\sqrt{x^2-3x}+\frac{1}{x}\sqrt{x^2+1}\right)} = \lim_{x\to\infty}\frac{-3x-1}{x*\left(\sqrt{1-\frac{3}{\sqrt{x}}}+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{-3-\frac{1}{x}}{\sqrt{1-\frac{3}{\sqrt{x}}}+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = \frac{-3}{\sqrt{1}+\sqrt{1}} = -\frac{3}{2}$$

Oppgave 5

a) Til å vise at løsning existerer, vi sjekker verdier av de to funksjoner $\cos x$ og x: Inn $x=0$, $=1$ og $x=0$. Her $\cos x$ er større enn x.

Inn $x=1$, vi har selvfølgelig $x=1$; og $\cos x<1$ pga cos er alltid max 1 og er akkurat 1 bare til $x=n*2\pi$. Kan også observeres at derivativ av $\cos x$ er alltid negativ inn $0<x<1$, så $\cos x<1$. Siden begge funksjoner er alltid kontinuerlig (og spesjelt inn $0<x<1$) de må krysse på noen punkt mellom 0 og 1; inn i dette punkt de har sammen verdi, og her gjelder $\cos x - x = 0$



b) Til å få inplisitt derivasjon, vi tenker av y som en funksjon av x: $y=y(x)$ og derivere begge sider av implisitt ligningen til x:

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dx}(x^5 + y^5) =& \frac{d}{dx}(4x^3y + 1) \\
5x^4 + 5y^4 * y' =& 4 * 3x^2y + 4x^3y' \\
5y^4 * y' - 4x^3y' =& 12x^2y - 5x^4 \\
y'(5y^4 - 4x^3) =& 12x^2y - 5x^4 \\
y' = \frac{dy}{dx} =& \frac{12x^2y - 5x^4}{5y^4 - 4x^3}
\end{aligned}
$$

Til tangent inn i punkt $P(2,1)$, bare kaste verdier inn i implisitt derivasjon: $(x = 2, y = 1)$:

$$
y'(2,1) = \frac{dy}{dx}(2,1) = \frac{12 * 2^2 * 1 - 5 * 2^4}{5 * 1^4 - 4 * 2^3} = \frac{32}{27} =
$$

Oppgave 6

a) Den universell løsning $y(x)$ er:

$$
y(x) = Ae^{D_1(x+C_1)} + Be^{D_2(x+C_2)}
$$

Verdier av D_1 og D_2 kan finnes med den karakteristisk ligningen:

$$
q^2 + 2q + 10 = 0
$$

De to løsninger av dette kvadrat er:

$$
\begin{aligned}
q_1 =& \frac{-2 + \sqrt{2^2 - 4 * 1 * 10}}{2} = -1 + 3i \\
q_2 =& \frac{-2 - \sqrt{2^2 - 4 * 1 * 10}}{2} = -1 - 3i
\end{aligned}
$$

En vei til å skrive den generell løsningen er:

$$
y(x) = Ae^{(x+C_1)(-1+3i)} + Be^{(x+C_2)(-1-3i)})
$$

Hvis vi er begrenset med reel løsning, $C_1 = C_2$ derfor det er mulig å bruke også den vanlig sinus-cosinus formel; a, b er forstatt variabel:

$$
y(x) = e^{-1*x}\big(a\cos(3x) + b\sin(3x)\big)
$$

Kan også sjekkes her hvis løsningen stemmer med differensialligningen.

b) Brukes her den siste formel siden det er de enkleste. Må regne ut y' først:

$$
\begin{aligned}
y'(x) =& \frac{d}{dx}e^{-x}\big(a\cos(3x) + b\sin(3x)\big) = -e^{x}\big(a\cos(3x) + b\sin(3x)\big) + e^{-x}\big(-3a\sin(3x) + 3b\cos(3x)\big) = \\
=& e^{-x}\big((3b - a)\cos(3x) + (-b - 3a)\sin(3x)\big)
\end{aligned}
$$

Og verdi inn i initialbetingelsene blir:

$$\begin{aligned}
y(0) =& e^{-0}\big(a\cos(3*0)+b\sin(3*0)\big)=a\\
y'(0) =& e^{-0}\big((3b-a)\cos(3*0)+(-b-3a)\sin(3*0)\big)=3b-a
\end{aligned}$$

Kan settes opp systemet til å finne a, b:

$$\begin{aligned}
y(0) =& 2 = a\\
y'(0) =& 3 = 3b-a\\
a =& 2\\
3 =& 3b-2 \;\rightarrow b = 5/3
\end{aligned}$$

Den løsninger med bestemte verdier av a, b er:

$$y(x) = e^{-x} * \big(2\cos(3x)+\frac{5}{3}\sin(3x)\big)$$

Sjekk nå at de stemmer med differensalligningen; må deriveres alt:

$$\begin{aligned}
y'(x) =& -e^{-x}*\big(2\cos(3x)+\frac{5}{3}\sin(3x)\big)+e^{-x}*\big(-3*2\sin(3x)+3*\frac{5}{3}\cos(3x)\big)=e^{-x}*\big(3\cos(3x)-\frac{23}{3}\sin(3x)\big)\\
y''(x) =& -e^{-x}*\big(3\cos(3x)-\frac{23}{3}\sin(3x)\big)+e^{-x}\big(-3*3\sin(3x)-3\frac{23}{3}\cos(3x)\big)==e^{-x}*\big(-26\cos(3x)-\frac{4}{3}\sin(3x)\big)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y''+2y'+10y =& 0\\
=& e^{-x}*\big(-26\cos(3x)-\frac{4}{3}\sin(3x)\big)\\
&+2*e^{-x}*\big(3\cos(3x)-\frac{23}{3}\sin(3x)\big)\\
&+10*C*\big(2\cos(3x)+\frac{5}{3}\sin(3x)\big)\\
=& e^{-x}*\big((-26+2*3+10*2)\cos(3x)+(-\frac{4}{3}-2*\frac{23}{3}+10*\frac{5}{3})\sin(3x)\big)\\
=& e^{-x}\big(0*\cos(3x)+0*\sin(3x)\big)
\end{aligned}$$