MAT100 Oblig2 2019 Løsninger

Oppgave 1

a) Finn de generelle løsningene til differensialligningene:

1) $y'' - 6y' - 16y = 0$; Den karakterisk ligning:

$$\begin{aligned}
&r^2 - 6r - 16 = 0 \\
&r_{12} = \frac{6 \pm \sqrt{6^2 - 4 * 1 * (-16)}}{2 * 1} = \frac{6 \pm \sqrt{100}}{2} = \frac{6 \pm 10}{2} \\
&r_1 = 8 \\
&r_2 = -2
\end{aligned}$$

Den generelle løsningen blir:

$$y(x) = Ae^{8x} + Be^{-2x}$$

2) $y'' + 4y' + 4y = 0$ Den karakterisk ligning:

$$\begin{aligned}
&r^2 + 4r + 4 = 0 \\
&r_{12} = \frac{-4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 * 1 * 4}}{2 * 1} = \frac{-4 \pm \sqrt{0}}{2} = -2 \\
&r_1 = r_2 = -2
\end{aligned}$$

Vi har -2 som dobbel rot, og den generelle løsningen blir:

$$y(x) = Ae^{-2x} + Bxe^{-2x}$$

b) Partikulære løsning til: $y'' - 6y' - 16y = 4e^{2x}$

$y(x)$ må være på formen Ce^{2x}; sett det inn i likningen:

$$\begin{aligned}
&y = Ce^{2x} \\
&y' = 2Ce^{2x} \\
&y'' = 2 * 2Ce^{2x} = 4Ce^{2x} \\
&4 * Ce^{2x} - 6 * 2Ce^{2x} - 16 * Ce^{2x} = 4e^{2x} \\
&Ce^{2x}(4 - 12 - 16) = 4e^{2x} \\
&C * (-24) = 4 \\
&C = \frac{4}{-24} = -\frac{1}{6}
\end{aligned}$$

Den partikulære løsningen blir da:

$$y(x) = -\frac{1}{6}e^{2x}$$

Ekstra: den homogene likning er lik den i 1a); så den generelle løsningen blir:

$$y(x) = -\frac{1}{6}e^{2x} + Ae^{8x} + Be^{-2x}$$

Med hvilken som helst verdi av A, B.

c) Initialverdiproblemet

$$y'' + 9y = 0,\ y(0) = 3,\ y'(0) = -3$$

Prosedyre: finn generell løsning ved hjelp av den karakteristiske likning; regn ut y' og sett inn initialverdier.

$$\begin{aligned}
&r^2 + 9 = 0 \rightarrow r^2 = -9 \rightarrow r = \pm 3i\, r_1 = 3i,\ r_2 = -3i \\
&y(x) = A\cos(3x) + B\sin(3x) \\
&y' = -3A\sin(3x) + 3B\cos(3x) \\
&y(0) = A\cos(3*0) + B\sin(3*0) = A = 3 \rightarrow A = 3 \\
&y'(0) = -3A\sin(3*0) + 3B\cos(3*0) = 3B = -3 \rightarrow B = -1 \\
&y(x) = 3\cos(3x) - \sin(3x)
\end{aligned}$$

Ekstra: kan også gjøres med exp istedefor med cosinus on sinus, det er litt lengre men resultatet blir det samme:

$$\begin{aligned}
&y(x) = Ce^{3ix} + De^{-3ix} \\
&y' = 3iCe^{3ix} - 3iDe^{-3ix} \\
&y(0) = Ce^{3i*0} + De^{-3i*0} = C + D = 3 \rightarrow C = 3 - D \\
&y'(0) = 3iCe^{3i*0} - 3iDe^{-3i*0} = 3iC - 3iD = -3 \rightarrow C = D + i \\
&3 - D = D + i \rightarrow 2D = 3 - i \rightarrow D = \frac{3}{2} - \frac{i}{2} \\
&C = D + i = \frac{3}{2} - \frac{i}{2} + i = \frac{3}{2} + \frac{i}{2} \\
&y(x) = (\frac{3}{2} + \frac{i}{2})e^{3ix} + (\frac{3}{2} - \frac{i}{2})e^{-3ix} \text{ (offisjell ferdig)} \\
&= (\frac{3}{2} + \frac{i}{2})(\cos(3x) + i\sin(3x)) + (\frac{3}{2} - \frac{i}{2})(\cos(3x) - i\sin(3x)) = \\
&= 3\cos(3x) - \sin(3x) \text{ (bedre)}
\end{aligned}$$

Oppgave 2

$$\frac{dN}{dt} = -kN$$

a) Kan bare huske den generelle løsningen eller skrive den karakteristiske likningen til $N(t)$:

$$\begin{aligned}
&\frac{dN}{dt} = -kN \rightarrow N' = -kN \rightarrow N' + kN = 0 \\
&r + k = 0 \rightarrow r = -k \\
&N(t) = Ae^{-kt}
\end{aligned}$$

b) Lengste metode: finn partikulærløsning; kan bruke eksempelet og sette inn verdier av $N(0)$ og $N(29)$ inn i den generelle løsningen (0 er nå, 29 er 29 år etterpå) for å finne k:

$$
\begin{aligned}
N(0) &= 2\,\text{kg} \\
N(29) &= 1\,\text{kg} \\
N(0) &= Ae^{-k*0} = A*1 = 2 \rightarrow A = 2[\text{kg}] \\
N(29) &= 2e^{-k*29} = 1 \rightarrow e^{-k*29} = 1/2 \rightarrow -k*29 = \log(1/2) \rightarrow k = -\frac{\log(1/2)}{29} \simeq 0,01
\end{aligned}
$$

Og nå finner vi den tid t slik at mengden av radioaktivt materiale blir redusert til 10 %; vi har:

$$
N(t) = 10\% N(0) = 0,1 * N(0)
$$

$$
\begin{aligned}
Ae^{(\frac{\log(1/2)}{29}t)} &= 0,1 * Ae^{(\frac{\log(1/2)}{29}0)} \\
e^{(-\frac{\log(1/2)}{29}t)} &= 0,1 * 1 \\
-\frac{\log(1/2)}{29}t &= \log(0,1)
\end{aligned}
$$

$$
t = -\log(0,1) * \frac{29}{\log(1/2)} = 29 * \log_2(10) \simeq 96,3\,[years]
$$

b) Kort metode: se at $N(t)$ blir halvert hvert 29 år, da kan løsningen skrives:

$$
N(t) = A\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{29}}
$$

Da får vi:

$$
\begin{aligned}
N(t) &= 10\% N(0) = 0,1 * N(0) \\
A\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{29}} &= 0,1 * N(0) = 0,1 * A \\
\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{29}} &= 0,1 \\
\frac{t}{29} &= \log_{\frac{1}{2}}(0,1) = \log_2(10) \\
t &= 29 * \log_2(10) \simeq 96,3\,[years]
\end{aligned}
$$

Oppgave 3

$$
f(x) = x^2 - 4\tan^{-1}(x)
$$

a) Se at funksion er derivabel overalt. Derivativ av $\tan^{-1}$ finnes i boka:

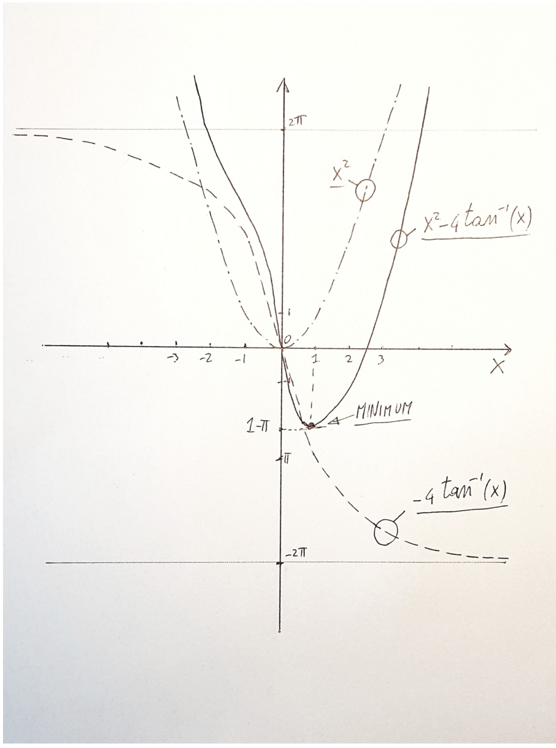
$$
\begin{aligned}
f'(x) =& 2x - \frac{4}{1+x^2} \\
=& 2x * \frac{(1+x^2)}{1+x^2} - \frac{4}{1+x^2} = \frac{2x + 2x^3 - 4}{1+x^2} = \\
=& 2\frac{x + x^3 - 2}{1+x^2} = 2\frac{(x-1)(x^2+x+2)}{1+x^2}
\end{aligned}
$$

Om tegn av $f'(x)$, vi sjekker alle komponenter:

$$\begin{aligned}
(x-1) >&0 \;\rightarrow\; x > 1;\; (x-1) = 0 \;\rightarrow\; x = 0\\
(x^2+x+2) >&0\ \forall x \in \mathbf{R}\\
1+x^2 >&0\ \forall x \in \mathbf{R}\\
x = 1 \;&\rightarrow f'(x) = 0\\
x > 1 \;&\rightarrow f'(x) > 0\\
x < 1 \;&\rightarrow f'(x) < 0
\end{aligned}$$

Funksjon stiger når $x < 1$ og øker når $x > 1$.

Når vi er ferdig med alle regning, det er alltid anbefalt å tegne ut et realistisk graf av funksjon.



b) Kan regne ut den andrederiverte og sjekk verdi for $x = 1$:

$$\begin{aligned}
f'(x) =& 2x - \frac{4}{1+x^2}\\
f''(x) =& 2 + \frac{4}{(1+x^2)^2} * 2x = \frac{2(1+x^2)^2 + 8x}{(1+x^2)^2}\\
f''(1) =& \frac{2(1+1^2)^2 + 8*1}{(1+1^2)^2} = \frac{16}{4} = 4
\end{aligned}$$

Den andrederiverte er positiv når $x = 1$, som er derfor et lokalt minimum. Siden $f(x)$ er stigende før og økende etter, $x = 1$ er det absolutt minimum. Her gjelder:

$$f(1) = 1^2 - 4\tan^{-1}(1) = 1 - 4 * \frac{\pi}{4} = 1 - \pi$$

Oppgave 4

Grenser; jeg brukte Derivasjon/L'Hopital regel hele veien; andre metoder kan fungere også.

a) Brukes derivasjonregel:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \frac{\log(x+1)}{x} &= \left(\frac{0}{0}\right) \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{(\log(x+1))'}{(x)'} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{(x+1)}}{1} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{(x+1)} = 1\end{aligned}$$

b) Brukes derivasjonregel tre ganger (ellers den kjent limit av $\sin x \simeq x$):

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \frac{\tan x - x}{x^3} &= \left(\frac{0}{0}\right) \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{(\tan x - x)'}{(x^3)'} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{(\cos^2 x)} - 1}{3x^2} = \left(\frac{0}{0}\right) \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{\left(\frac{1}{(\cos^2 x)} - 1\right)'}{(3x^2)'} = \lim_{x\to 0} \frac{2\sin x * \frac{1}{\cos^3 x}}{6x} = \left(\frac{0}{0}\right) \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{\left(2\sin x * \frac{1}{\cos^3 x}\right)'}{(6x)'} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{2}{\cos^2 x} + \frac{6\sin^2 x}{\cos^4 x}}{6} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{2}{1} + \frac{6*0}{1}}{6} = \frac{1}{3}\end{aligned}$$

c) Derivasjonregel en gang:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - e^x}{x} &= \left(\frac{0}{0}\right) \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{(\cos x - e^x)'}{(x)'} = \lim_{x\to 0} \frac{-\sin x - e^x}{1} = \frac{0-1}{1} = -1\end{aligned}$$

Oppgave 5

$$\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2 + x} - \sqrt{x^2 + bx}\right) = 7$$

Bestem b slik at gir den definert grense; først løse grense, etterpå løse til b.

Jeg bytter grense med et tilsvarende grense til null og bruk derivasjonregler; andre metoder er tillatt og kansje enklere:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2+bx}\right) = \lim_{x\to\infty} x\Big(\sqrt{1+\frac{1}{x}}-\sqrt{1+\frac{1}{x}}\Big)$$

$$(y=\frac{1}{x})$$

$$=\lim_{y\to 0}\frac{1}{y}\Big(\sqrt{1+y}-\sqrt{1+by}\Big) = \Big(\frac{0}{0}\Big)$$

$$=\lim_{y\to 0}\frac{\Big(\sqrt{1+y}-\sqrt{1+by}\Big)'}{y'} = \lim_{y\to 0}\frac{\frac{1}{2}*\frac{1}{\sqrt{1+y}}-\frac{1}{2}*\frac{b}{\sqrt{1+by}}}{1} = \frac{1}{2}-\frac{b}{2}$$

Grense må være 7, da:

$$\frac{1}{2}-\frac{b}{2}=7 \to b=-13$$

Ekstra: kan være at noen studenter tenker b ikke som et fast nummer men som et funksjon av x: $b=b(x)$. Det er ganske forskjell men teoretisk det er korrekt også. Jeg har funnet ingen god løsning til det, borsatt alle slik

$$\lim_{x\to\infty} b(x) = -13$$

Som f. eks like det:

$$b(x) = -13+\frac{1}{x}$$

Oppgave 6

a)

$$\int_0^3 (x^3-\sqrt{x})dx = (\frac{1}{4}x^4-\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}})|_0^3 = (\frac{1}{4}3^4-\frac{2}{3}3^{\frac{3}{2}})-((\frac{1}{4}0^4-\frac{2}{3}0^{\frac{3}{2}}) = \frac{81}{4}-2\sqrt{3}\simeq 16,79$$

b)

$$\int_0^\pi (\sin x-\cos 2x)dx = (-\cos x-\frac{1}{2}\sin 2x)|_0^\pi = (-\cos\pi-\frac{1}{2}\sin 2\pi)-(-\cos 0-\frac{1}{2}\sin 2*0) =$$

$$=(1-0)-(-1-0)=2$$

c)

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx = (\tan^{-1}x)|_0^1 = (\tan^{-1}1)-(\tan^{-1}0) = \frac{\pi}{4}-0=\frac{\pi}{4}$$

Oppgave 7

a) Kan vises at rektangel er alltid symmetrisk rundt punkt $O(0,0)$ da arealet skal være $f(x) = 4*x*y$, hvor $A=(x,y)$ et er hjørn.

Andre hjørner kan skrives enkelt som $B(-x, y)$, $C(-x, -y)$, $D(x, -y)$. Arealet kan skrives igjen som:

$$f(x) = |A - B| * |A - D| = 4 * x * y$$

Til å finne funksjon, vi bare løse den ellipse likning til y som funksjon av x hos punkt A. Husk at hos A, både $x \geq 0$, $y \geq 0$.

$$\begin{aligned} 4x^2 + y^2 =& 4 \\ y^2 =& 4 - 4x^2 \\ y =& 2\sqrt{1 - x^2} \\ f(x) =& 4 * x * y = 4 * x * 2\sqrt{1 - x^2} = 8x\sqrt{1 - x^2} \end{aligned}$$

b) Til å finne den største arealet, vi må finne maximum av funksjon $f(x)$; det er derivabel inn i $-1 < x < 1$; derfor sjekker vi ovor derivativ er null. Husk igjen at vi er begrenset inn i $x \geq 0$, $y \geq 0$.

$$\begin{aligned} f(x) =& 8x\sqrt{1 - x^2} \\ f'(x) =& 8\sqrt{1 - x^2} - 8x * 2x * \frac{1}{2\sqrt{1 - x^2}} = 8\sqrt{1 - x^2} - \frac{8x^2}{\sqrt{1 - x^2}} \\ f'(x) =& 0 \\ 8\sqrt{1 - x^2} - \frac{8x^2}{\sqrt{1 - x^2}} =& 0 \\ 8\sqrt{1 - x^2} =& \frac{8x^2}{\sqrt{1 - x^2}} \\ 8\sqrt{1 - x^2} * \sqrt{1 - x^2} =& \frac{8x^2}{\sqrt{1 - x^2}} * \sqrt{1 - x^2} \\ 8(1 - x^2) =& 8x^2 \\ 8 =& 16x^2 \\ x =& \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

Dette er den x slik at derivativ er null; kan prøves at det er den absolutt maximum (med andererederivert, ellers tegn av førstederivert). Nå må finne den y med formel funnet i a), og arealet:

$$
\begin{aligned}
y =& 2\sqrt{1-x^2} = 2\sqrt{1-(\frac{1}{\sqrt{2}})^2} = 2\sqrt{1-\frac{1}{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \\
A_{max}(x,y) =& (\frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2}) \\
\text{Arealet } =& 4 * x * y = 4 * \frac{\sqrt{2}}{2} * \sqrt{2} = 4 \\
\text{Arealet } =& f(x) = f(\frac{\sqrt{2}}{2}) = 8\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{1-(\frac{\sqrt{2}}{2})^2} = 8 * \frac{\sqrt{2}}{2} * \sqrt{\frac{1}{2}} = 4
\end{aligned}
$$