MAT100 Oblig3 2019 Løsninger

Kort fasit

1a) $\int = x(\ln x - 1) + C$

1b) $\int = x \sin x + \cos x + C$

1c) $\int = \frac{1}{2} \ln |x^2 + 2x + 2| + C$

1d) $\int = \frac{1}{2} \ln |2e^x + 5| + C$

1e) $\int = \ln |2 + \ln x| + C$

1f) $\int = \frac{1}{10}(e^x \sin(3x) - 3e^x \cos(3x)) + C$

1g) $\int = \ln |x - 2| + \ln |x^2 + 1| + 2 \arctan(x) + C$

1h) $\int = -\cos x + \frac{1}{3} \cos^3 x + C$

2a) Arealet [-1, 1] $= e - e^{-1} - \frac{2}{3}$

2b) Volum [-1, 1] $= \pi\left(\frac{1}{4}e^2 - \frac{1}{4}e^{-2} + 1\right)$

3a) $\int_1^e x^2(lnx)^2 dx = \frac{5e^3}{27} - \frac{2}{27}$

3b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\sin x} \cos x dx = \frac{2}{3}$

3c) $\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} dx = \pi$

4a) sett inn $u = e^x$ og vise at integralet kommer ut som anbefalt

4b) $\int \frac{1}{(e^x + 1)^2} dx = x - \ln(e^x + 1) + \frac{1}{e^x + 1} + C$

5a) $\int \frac{1 - x^2}{(1 + x^2)(x^2 + 9)} dx = \frac{1}{4} \arctan(x) - \frac{5}{12} \arctan(\frac{x}{3}) + C$

5b) $\int \frac{\cos\theta}{5 + 4\cos\theta} d\theta = \frac{\theta}{4} - \frac{5}{6} \arctan(\frac{\tan\frac{\theta}{2}}{3}) + C$

Oppgave 1

a) Integral kan deles av to kjent integraler; husk den konstant C på slutten:

$$\int \ln x \, dx = \int U dV = UV - \int V du$$

$$U = \ln x; \quad dV = dx$$

$$dU = \frac{1}{x} dx; \quad V = x$$

$$\int \ln x \, dx = \ln(x) * x - \int x * \frac{1}{x} dx = x \ln x - \int 1 dx =$$

$$= x \ln x - x + C = x(\ln x - 1) + C$$

Den modulus $|x|$ er ikke nødvendig her pga $\ln x$ inn i integralet er allerede definert bare til $x > 0$.

b) Sammen teknikk:

$$\int x \cos x dx = \int U dV = UV - \int V du$$

$$U = x; \quad dV = \cos x dx$$

$$dU = dx; \quad V = \sin x$$

$$\int x \cos x dx = x \sin x - \int \sin x dx =$$

$$= x \sin x + \cos x + C$$

c) Kan igjen deles, ellers bare se at teller er derivativ av evner:

$$\int \frac{x+1}{x^2 + 2x + 2} dx = A \int \frac{U'}{U} dV = A \ln(U) + C$$

$$U = x^2 + 2x + c; \quad U' = (2x + 2) = 2(x + 1); \quad A = \frac{1}{2}$$

$$\int \frac{x+1}{x^2 + 2x + 2} dx = \int \frac{\frac{1}{2}(x^2 + 2x + 2)'}{x^2 + 2x + 2} dx =$$

$$= \frac{1}{2} \ln |x^2 + 2x + 2| + C$$

Her argumentet av logaritm må ha modulus. d) Som på c)

$$\int \frac{e^x}{2e^x + 5} dx = A \int \frac{U'}{U} dV = A \ln(U) + C$$

$$U = 2e^x + 5; \quad U' = 2e^x; \quad A = \frac{1}{2}$$

$$\int \frac{e^x}{2e^x + 5} dx = \int \frac{\frac{1}{2}(2e^x + 5)'}{2e^x + 5} dx =$$

$$= \frac{1}{2} \ln |2e^x + 5| + C$$

e) Igjen, det står derivativ av logaritm:

$$\int \frac{1}{x(2+\ln x)} dx = \int \frac{1}{x} \frac{1}{2+\ln x} = A \int \frac{U'}{U} dV = A \ln(U) + C$$

$$U = 2 + \ln x; \quad U' = \frac{1}{x}; \quad A = 1$$

$$\int \frac{1}{x(2+\ln x)} dx = \int \frac{(2+\ln x)'}{2+\ln x} dx =$$

$$= \ln|2 + \ln x| + C$$

f) Det må deles og repetere to ganger:

$$\int e^x \sin(3x) dx = \int U dV = UV - \int V du$$

$$U = \sin(3x); \quad dV = e^x dx$$

$$dU = 3\cos(3x) dx; \quad V = e^x$$

$$\int e^x \sin(3x) dx = e^x \sin(3x) - \int e^x 3\cos(3x) dx$$

$$W = \cos(3x); \quad dZ = e^x dx$$

$$dW = -3\sin(3x); \quad Z = e^x$$

$$\int e^x 3\cos(3x) dx = 3e^x \cos(3x) - 3 \int e^x(-3\sin(3x)) = 3e^x \cos(3x) + 9 \int e^x \sin(3x)$$

$$\int e^x \sin(3x) dx = e^x \sin(3x) - 3e^x \cos(3x) - 9 \int e^x \sin(3x)$$

$$10 * \int e^x \sin(3x) dx = e^x \sin(3x) - 3e^x \cos(3x) \ (+C)$$

$$\int e^x \sin(3x) dx = \frac{1}{10}(e^x \sin(3x) - 3e^x \cos(3x)) + C$$

g) Her derivativ funker ikke, så vi må skylle bråken ($\arctan = \tan^{-1}$):

$$\int \frac{3x^2 - 2x - 3}{(x-2)(x^2+1)} dx = \int \frac{A}{x-2} dx + \int \frac{Bx + C}{x^2+1} dx$$

$$3x^2 - 2x - 3 = A * (x^2 + 1) + (Bx + C)(x - 2) = (A + B) * x^2 + (-2B + C) * x + (A - 2C) * 1$$

$$A + B = 3; \quad -2B + C = -2; \quad A - 2C = -3$$

$A = 1; \quad B = 2; \quad C = 2$ Now the two integrals:

$$\int \frac{1}{x-2} dx = \ln(x-2) + D$$

$$\int \frac{2x+2}{x^2+1} dx = \int \frac{2x}{x^2+1} dx + \int \frac{2}{x^2+1} dx =$$

$$= \ln(x^2+1) + 2\arctan(x) + E$$

$$\int \frac{3x^2 - 2x - 3}{(x-2)(x^2+1)} dx = \ln|x-2| + \ln|x^2+1| + 2\arctan(x) + F$$

h) Rask vei:

$$\int \sin^3 x 3dx = \int \sin x \sin^2 x dx = \int \sin x(1-\cos^2 x)dx = -\cos x - \int \sin x \cos^2 x dx$$
$$= -\cos x + \frac{1}{3}\cos^3 x + C$$

Oppgave 2

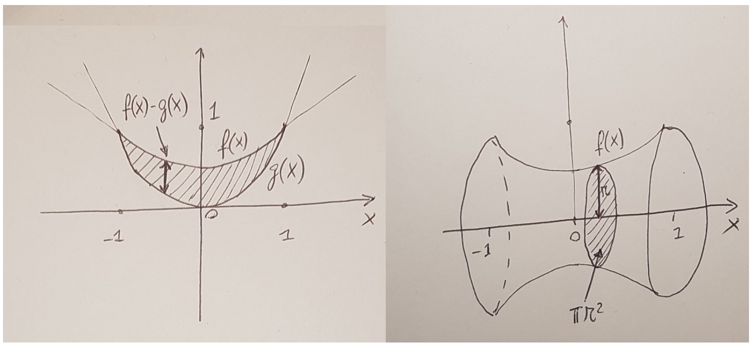
a) Arealet kan finnes med integral av absolutt verdi av forskell mellom de to funksjoner; se at $f(x) \geq g(x)$ inn i $[-1, 1]$.

$$\text{Arealet [-1, 1]} = \int_{-1}^{1} |f(x) - g(x)| dx$$
$$= \int_{-1}^{1} \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) - x^2 \, dx = \big(\frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) - \frac{1}{3}x^3\big)|_{-1}^{1}$$
$$= \big(\frac{1}{2}(e^1 - e^{-1}) - \frac{1}{3}1^3\big) - \big(\frac{1}{2}(e^{-1} - e^1) - \frac{1}{3}(-1)^3\big) = e - e^{-1} - \frac{2}{3} \simeq 1,68$$

Kan også se at $\frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$ er den Hyperbolisk Cosin funksjon (Cosh) så kan det brukes.

b) Volumet av omdreiningslegmet rundt x axis er integral gjennom x av arealer av sirkler, de har som radius akkurat $f(x)$: $\pi r^2 = \pi(f(x))^2$.

$$\text{Volum [-1, 1]} = \int_{-1}^{1} \pi f(x)^2 dx = \int_{-1}^{1} \pi(\frac{1}{2}(e^x + e^{-x}))^2 \, dx =$$
$$= \pi \int_{-1}^{1} \Big(\frac{1}{4}e^{2x} + \frac{1}{4}e^{-2x} + \frac{1}{2}\Big)dx =$$
$$= \pi\big(\frac{1}{8}e^{2x} - \frac{1}{8}e^{-2x} + \frac{x}{2}\big)|_{-1}^{1} = \pi\big(\frac{1}{8}e^2 - \frac{1}{8}e^{-2} + \frac{1}{2}\big) - \pi\big(\frac{1}{8}e^{-2} - \frac{1}{8}e^2 - \frac{1}{2}\big) =$$
$$= \pi\big(\frac{1}{4}e^2 - \frac{1}{4}e^{-2} + 1\big) \simeq 8,84$$



Oppgave 3

a) Dette kan deles:

$$\int_1^e x^2(lnx)^2dx = \int UdV = UV - \int Vdu$$

$$U = (\ln x)^2; \quad dV = x^2dx$$

$$dU = \frac{2\ln x}{x}dx; \quad V = \frac{x^3}{3}$$

$$\int_1^e x^2(lnx)^2 = (\frac{x^3}{3}((\ln x)^2)_1^e) - \int_1^e \frac{x^3}{3}\frac{2\ln x}{x}dx =$$

$$= (\frac{x^3}{3}(\ln x)^2)_1^e - \int_1^e \frac{2}{3}x^2\ln x dx \quad \text{må deles igjen}$$

$$W = \ln x; \quad dZ = x^2dx$$

$$dW = \frac{1}{x}dx; \quad Z = \frac{x^3}{3}$$

$$\int_1^e \frac{2}{3}x^2\ln x dx = \frac{2}{3}(\frac{x^3}{3}(\ln x)^2 - \int_1^e \frac{x^3}{3}\frac{1}{x}dx) = (\frac{2x^3}{9}(\ln x)^2 - \frac{2x^3}{27})|_1^e)$$

$$\int_1^e x^2(lnx)^2dx = (\frac{x^3}{3}(\ln x)^2 - \frac{2x^3}{9}(\ln x)^2 - \frac{2x^3}{27})|_1^e =$$

$$= (\frac{e^3}{3}1^2 - \frac{2e^3}{9}1^2 + \frac{2e^3}{27}) - (0 - 0 + \frac{2*1^3}{27}) = \frac{5e^3}{27} - \frac{2}{27}$$

b) Se at sinus og cosinus er derivativ av hverandre; bytt navn til variabel:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\sin x}\cos x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} F(U)dU$$

$$U = \sin x; \quad dU = \cos x dx; \quad F(U) = \sqrt{U}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\sin x}\cos x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{U}dU = (\frac{2}{3}U^{\frac{3}{2}})|_0^{\frac{\pi}{2}} = (\frac{2}{3}(\sin x)^{\frac{3}{2}})|_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= \frac{2}{3} * 1^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3} * 0^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}$$

c) Dette finnes på tabell av kjente integraler:

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \arcsin x|_{-1}^1 = \arcsin(1) - \arcsin(-1) = \frac{\pi}{2} - \frac{-\pi}{2} = \pi$$

Oppgave 4

a) Bare bruk subsitusjonen til å sjekke at de fungere; må regnes den 'du':

$$u = e^x$$

$$du = u' * dx = e^x * dx \quad \text{sett dette inn i integralet:}$$

$$\int \frac{1}{u(u+1)^2}du = \int \frac{1}{e^x(e^x+1)^2}e^x dx = \int \frac{1}{(e^x+1)^2}dx$$

b) Vi bruker den ny form med u; evner er faktorisert allerede, derfor bråk kan separeres; forskellige måter, å separeres med A, B, C, vi velger det:

$$\int \frac{1}{u(u+1)^2} du = \int \frac{A}{u} + \frac{B}{u+1} + \frac{C}{(u+1)^2}\, du$$

$$1 = A(u+1)^2 + Bu(u+1) + Cu = u^2 * (A+B) + u * (2A+B+C) + 1 * A$$

$$A = 1; \quad A+B = 0 \rightarrow B = -1; \quad 2A+B+C = 0 \rightarrow C = -1$$

$$= \int \frac{1}{u} + \frac{-1}{u+1} + \frac{-1}{(u+1)^2} du =$$

$$= \ln u - \ln(u+1) + \frac{1}{u+1} + C \quad \text{sett tilbake } u = e^x :$$

$$= \ln(e^x) - \ln(e^x+1) + \frac{1}{e^x+1} + C = x - \ln(e^x+1) + \frac{1}{e^x+1} + C$$

Her det er ikke nødvendig å ta modulus for logaritmen pga det er uansett alltid positiv (med x reel).

Oppgave 5

a) den bråk er faktorisert og må deles:

$$\int \frac{1-x^2}{(1+x^2)(x^2+9)} dx = \int \frac{A}{1+x^2} + \frac{B}{9+x^2} dx$$

$$1 - x^2 = A(9+x^2) + B(1+x^2) = x^2(A+B) + 1 * (9A+B)$$

$$A+B = -1 \rightarrow B = -1-A; \quad 9A+B = 1;\ 9A-1-A = 1 \rightarrow A = \frac{1}{4};\ B = -\frac{5}{4}$$

De nye bråker er begge den kjent integralet av arctan; bruk subsitusjon $y = \frac{1}{3}x$; $x = 3y$ til den andre:

$$\int \frac{\frac{1}{4}}{1+x^2} dx = \frac{1}{4} \arctan(x) + C$$

$$\int \frac{-\frac{5}{4}}{9+x^2} dx = \int \frac{-\frac{5}{4}}{9+(3y)^2} 3dy = -\frac{5}{4} * \frac{3}{9} \int \frac{1}{1+y)^2} dy = -\frac{5}{12} \arctan(y) + C = -\frac{5}{12} \arctan(\frac{x}{3}) + C$$

$$\int \frac{1-x^2}{(1+x^2)(x^2+9)} dx = \frac{1}{4} \arctan(x) - \frac{5}{12} \arctan(\frac{x}{3}) + C$$

b) Her vi må erstatte θ med x på riktig måte, og håper at vi treffer den form fra 5a):

$$x = \tan\frac{\theta}{2} \to \theta = 2\arctan x$$
$$d\theta = d(2\arctan x) = \frac{2}{1+x^2}\,dx$$
$$\cos\theta = \frac{1-x^2}{1+x^2}$$

$$\int \frac{\cos\theta}{5+4\cos\theta}d\theta = \int \frac{\frac{1-x^2}{1+x^2}}{5+4\frac{1-x^2}{1+x^2}} * \frac{2}{1+x^2}dx = \int \frac{1}{\frac{5(1+x^2)+4(1-x^2)}{1+x^2}} * \frac{1-x^2}{1+x^2} * \frac{2}{1+x^2}dx =$$
$$=2\int \frac{1}{\frac{x^2+9}{1+x^2}} * \frac{1-x^2}{1+x^2} * \frac{1}{1+x^2}dx = 2\int \frac{1+x^2}{x^2+9} * \frac{1-x^2}{1+x^2} * \frac{2}{1+x^2}dx =$$
$$=2\int \frac{1-x^2}{(1+x^2)(x^2+9)}dx$$

Som er akkurat integralet løset før, med den 2 faktor ekstra. Vi må erstatte tilbake θ istedefor av x:

$$\int \frac{\cos\theta}{5+4\cos\theta}d\theta = 2\int \frac{1-x^2}{(1+x^2)(x^2+9)}dx = 2\Big(\frac{1}{4}\arctan(x) - \frac{5}{12}\arctan(\frac{x}{3})\Big) + C$$
$$\Big(x = \tan\frac{\theta}{2}\Big)$$
$$=2\Big(\frac{1}{4}\arctan(\tan\frac{\theta}{2}) - \frac{5}{12}\arctan(\frac{\tan\frac{\theta}{2}}{3})\Big) + C = \frac{\theta}{4} - \frac{5}{6}\arctan(\frac{\tan\frac{\theta}{2}}{3}) + C$$

Kansje den arctan på andre plass kan simplifiseres videre.