MAT100 - Matematiske metoder 1
Obligatorisk innlevering II

Frist: Fredag 11. oktober, kl. 23:59

Oppgave 1

a) Finn de generelle løsningene til differensialligningene:

$$1)\ y'' - 6y' - 16y = 0 \qquad\qquad 2)\ y'' + 4y' + 4y = 0$$

b) Bruk den ubestemte koeffisienters metode og finn en partikulær løsning til differensialligningen: $y'' - 6y' - 16y = 4e^{2x}$.

c) Løs initialverdiproblemet

$$y'' + 9y = 0, \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = -3.$$

Oppgave 2

Mengden, N, som funksjon av tiden t, av et radioaktivt materiale følger differentialligningen:

$$\frac{dN}{dt} = -kN,$$

hvor k er en konstant.

a) Hva er den generelle løsningen til denne ligningen?

Vi antar at vi har opprinnelig 2 kg av det radioaktive materialet Strontium-90. Halveringstiden til Strontium-90 er 29 år, det vil si at etter 29 år er det bare 1 kg igjen av dette materialet.

b) Hvor lang tid vil det ta før det er bare 10% igjen av den opprinnelige mengden Strontium-90?

Oppgave 3

La

$$f(x) = x^2 - 4\tan^{-1}(x),$$

hvor $\tan^{-1}(x)$ er den inverse funksjonen til $\tan(x)$.

a) Bestem monotoniegenskapene til f.

b) Bruk andrederiverttesten og vis at $x = 1$ er et minimum for f. Hva er den absolutte minimumsverdien for f?

Oppgave 4

Regn ut grenseverdiene:

$$\text{a)}\ \lim_{x\to 0}\frac{\ln(x+1)}{x}, \qquad \text{b)}\ \lim_{x\to 0}\frac{\tan x - x}{x^3}, \qquad \text{c)}\ \lim_{x\to 0}\frac{\cos x - e^x}{x}.$$

Oppgave 5

Bestem b slik at

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+x} - \sqrt{x^2+bx}\right) = 7.$$

Oppgave 6

Finn de bestemte integralene:

$$\text{a)}\ \int_0^3 (x^3 - \sqrt{x})dx, \qquad \text{b)}\ \int_0^{\pi} (\sin x - \cos 2x)dx \qquad \text{c)}\ \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx \tag{1}$$

Oppgave 7

Sara Sirkel har tegnet en ellipse med et innskrevet rektangel (i rødt), se nedenfor. Hun lurer så på hva det største mulige arealet et slikt innskrevet rektangel kan være. Ellipsen nedenfor er gitt ved:

$$4x^2 + y^2 = 4.$$

Vi velger så punktet $A(x, y)$ til å ligge på ellipsa og er ett av hjørnene til rektangelet.

a) La f være arealet til det innskrevne rektangelet. Vis at dette kan skrives som:

$$f(x) = 8x\sqrt{1 - x^2}, \quad 0 < x < 1.$$

b) Finn punktet A på ellipsa som gir det største arealet. Hva blir arealet da?