Universitetet i Stavanger

Det Teknisk-Naturvitenskapelige Fakultet

Eksamen i: MAT100 Matematiske metoder 1
Dato: 6. desember, 2019
Tid: 9:00-14:00 (5 timer)
Språk: Norsk, Bokmål
Tillatte hjelpemidler:
K. Rottmann, *Matematisk formelsamling*.
Enkel bestemt kalkulator.
Faglærer: Sigbjørn Hervik, tlf: 41581800

Oppgavesettet består av 6 oppgaver på 3 sider.
Deloppgaver a), b) etc,. vektes likt.

$\infty \qquad \infty \qquad \infty \qquad \infty$

Oppgave 1

a) Gitt $z = 3 - 2i$ og $w = 4 + 5i$. Regn ut zw, $1/z$ og $\bar{z}^2$.

b) Finn alle løsningene til $z^3 + 8i = 0$. Skriv de på kartesisk form og tegn de inn i det komplekse planet.

c) Regn ut og skriv på kartesisk form:

$$\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{2019}$$

Oppgave 2

Finn følgende integraler. Utregning må vises!

a) $\displaystyle\int \left(4x^{5/2} - \sin(2x)\right) dx.$ b) $\displaystyle\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx.$

c) $\displaystyle\int \frac{x-18}{(x-2)(x^2+4)} dx.$ d) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{2+x}} dx.$

Oppgave 3

a) Regn ut følgende integral (vis utregning):

$$\int \sin^2 x dx$$

b) Bruk en invers trigonometrisk substitusjon til å regne ut:

$$\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

Oppgave 4

a) Finn løsningen på initialverdiproblemet:

$$\begin{cases} y' + \frac{4}{x} y = x^3 \\ y(1) = 0 \end{cases} \tag{1}$$

b) Finn den generelle løsningen på den homogene differensialligningen:

$$y'' - 4y' + 8y = 0.$$

c) Finn den generelle løsningen på den inhomogene differensialligningen:

$$y'' - 4y' + 8y = x^2 + 1.$$

Oppgave 5

Vi definerer
$$f(x) = \frac{1}{8}x^2 - \ln x, \qquad x > 0.$$

a) Bestem monotoniegeneskapene til f, og eventuelle topp- og bunnpunkt.

b) Finn ligningene for tangenten og normalen til f for $x = 1$.

c) Finn buelengden av grafen til f fra $x = 1$ til $x = 4$.

Oppgave 6

Pelle Parafin har funnet noen skikkelig gamle beinrester i hagen sin. Han lurer på hvor gamle de er. Han vet at man kan finne alder på organisk materiale ved å sjekke mengden av den radioaktive isotopen Carbon-14 i forhold til de andre karbonisotopene. Vi antar det var opprinnelig 2 gram av dette radioaktive materialet. Carbon-14 har en halveringstid på 5700 år, det vil si at etter 5700 år vil det være 1 gram igjen av dette materialet.

Mengden, N, som funksjon av tiden t, av et radioaktivt materiale følger differensialligningen:
$$\frac{dN}{dt} = -kN,$$
hvor k er en konstant.

a) Hva er løsningen til denne ligningen når vi har at $N(0) = 2$?

b) Hvor lang tid vil det ta før det er bare 30% igjen av den opprinnelige mengden Carbon-14?

♡ God Jul! ♡