BIT 100 Fysikk

Eksamen 04.12.08 - Løsningsforslag.

OPPGAVE 1.

(a) Total impuls er gitt ved

$$I_x = \int_{t_i}^{t_f} F_x(t)\, dt$$

som svarer til arealet under $F_x(t)$-kurven. Det følger fra figuren (areal under en trekant: (grunnlinje $\times$ høyde) / 2) at

$$I_x = \frac{1}{2} \cdot (220\,\mathrm{N}) \cdot (3.00 \times 10^{-2}\,\mathrm{s}) = 3.30\,\mathrm{kgms}^{-1}$$

(b) Nytter impuls-bevegelsesmengde teoremet:

$$\Delta p_x = I_x \qquad \Rightarrow \qquad m\,(v_{xf} - v_{xi}) = I_x$$

Med $v_{xi} = 0\,\mathrm{m/s}$ følger det at

$$v_{xf} = \frac{I_x}{m} = \frac{3.30\,\mathrm{kgms}^{-1}}{0.0600\,\mathrm{kg}} = 55.0\,\mathrm{m/s}$$

Uttrykt i km/time:

$$v_{xf} = 55.0 \cdot \frac{1\,\mathrm{m}}{1\,\mathrm{s}} \cdot \frac{1\,\mathrm{km}}{1000\,\mathrm{m}} \cdot \frac{3600\,\mathrm{s}}{1\,\mathrm{time}} = (55.0 \times 3.60)\,\mathrm{km/time} = 198\,\mathrm{km/time}$$

OPPGAVE 2.

(a) Nytter definisjonen på massesenterhastighet:

$$(m_{\mathrm{A}} + m_{\mathrm{B}})\,\vec{\mathbf{v}}_{\mathrm{CM}} = m_{\mathrm{A}}\,\vec{\mathbf{v}}_{\mathrm{A}} + m_{\mathrm{B}}\,\vec{\mathbf{v}}_{\mathrm{B}}$$

Det følger at

$$\begin{aligned}
\vec{\mathbf{v}}_{\mathrm{A}} &= \frac{(m_{\mathrm{A}} + m_{\mathrm{B}})\,\vec{\mathbf{v}}_{\mathrm{CM}}}{m_{\mathrm{A}}} - \frac{m_{\mathrm{B}}\,\vec{\mathbf{v}}_{\mathrm{B}}}{m_{\mathrm{A}}} \quad \Downarrow \\
&= \left(1 + \frac{m_{\mathrm{B}}}{m_{\mathrm{A}}}\right)\vec{\mathbf{v}}_{\mathrm{CM}} - \frac{m_{\mathrm{B}}}{m_{\mathrm{A}}}\,\vec{\mathbf{v}}_{\mathrm{B}}
\end{aligned}$$

Med de aktuelle massene har vi:

$$\begin{aligned}
\vec{\mathbf{v}}_{\mathrm{A}} &= \left(1 + \frac{0.030\,\mathrm{kg}}{0.020\,\mathrm{kg}}\right)\vec{\mathbf{v}}_{\mathrm{CM}} - \frac{0.030\,\mathrm{kg}}{0.020\,\mathrm{kg}}\,\vec{\mathbf{v}}_{\mathrm{B}} \quad \Downarrow \\
&= \frac{5}{2}\,\vec{\mathbf{v}}_{\mathrm{CM}} - \frac{3}{2}\,\vec{\mathbf{v}}_{\mathrm{B}}
\end{aligned}$$

Dette gir:

$$\begin{aligned}
\vec{\mathbf{v}}_{\mathrm{A}} &= \left[\frac{5}{2}\,(-1.00\,\hat{\jmath}) - \frac{3}{2}\,(-4.00\,\hat{\imath} - 3.00\,\hat{\jmath})\right]\ \mathrm{m/s} \\
&= (6.00\,\hat{\imath} + 2.00\,\hat{\jmath})\ \mathrm{m/s}
\end{aligned}$$

Og det følger at:

$$|\vec{\mathbf{v}}_{\mathrm{A}}| = \sqrt{v_{\mathrm{A}x}^2 + v_{\mathrm{A}y}^2} = \sqrt{40.0}\,\mathrm{m/s} = 6.32\,\mathrm{m/s}$$

(b) Kaller slutthastigheten for det sammenheftede objektet for $\vec{\mathbf{v}}_f$. Bevaring av bevegelsesmengde gir:

$$(m_{\mathrm{A}} + m_{\mathrm{B}})\,\vec{\mathbf{v}}_f = m_{\mathrm{A}}\,\vec{\mathbf{v}}_{\mathrm{A}} + m_{\mathrm{B}}\,\vec{\mathbf{v}}_{\mathrm{B}}$$

Fra punkt (a) hadde vi at

$$(m_{\mathrm{A}} + m_{\mathrm{B}})\,\vec{\mathbf{v}}_{\mathrm{CM}} = m_{\mathrm{A}}\,\vec{\mathbf{v}}_{\mathrm{A}} + m_{\mathrm{B}}\,\vec{\mathbf{v}}_{\mathrm{B}}$$

Der $\vec{\mathbf{v}}_{\mathrm{CM}}$ var massesenterhastigheten før kollisjonen. Det følger at

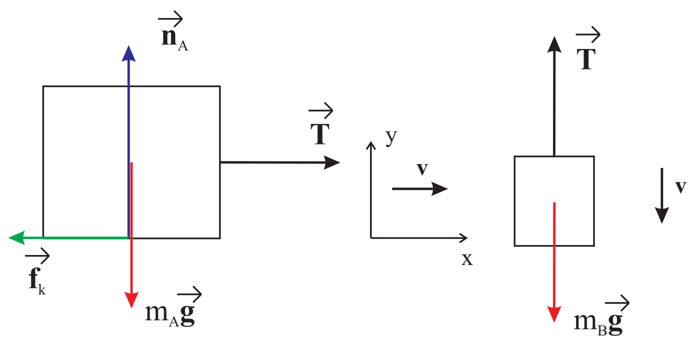
$$\vec{\mathbf{v}}_f = \vec{\mathbf{v}}_{\mathrm{CM}}$$

Som vi i prinsipp kunne ha skrevet opp direkte da massesenterhastigheten er en konstant i en kollisjonsprosess.
Endringen i kinetisk energi blir da:

$$\begin{aligned}
\Delta K &= K_f - K_i \\
&= \frac{1}{2}(m_{\mathrm{A}} + m_{\mathrm{B}})\,v_{\mathrm{CM}}^2 - \left(\frac{1}{2}\,m_{\mathrm{A}}\,v_{\mathrm{A}}^2 + \frac{1}{2}\,m_{\mathrm{B}}\,v_{\mathrm{B}}^2\right) \\
&= \quad \frac{1}{2}(0.050\,\mathrm{kg}) \cdot (1.00\,\mathrm{m^2 s^{-2}}) \\
&\quad -\frac{1}{2}(0.020\,\mathrm{kg}) \cdot (40.0\,\mathrm{m^2 s^{-2}}) \\
&\quad -\frac{1}{2}(0.030\,\mathrm{kg}) \cdot (25.0\,\mathrm{m^2 s^{-2}}) \\
&= 0.025\,\mathrm{J} - 0.775\,\mathrm{J} \\
&= -0.750\,\mathrm{J}
\end{aligned}$$

OPPGAVE 3.

(a) Aktuelt frilegemediagram (den ideelle trinsen er utelatt siden den ikke har noen betydning for analysen):



Siden systemet av klosser beveger seg med konstant hastighet, må

$$\begin{aligned} m_B\, g - T &= 0 \\ T - f_k &= 0 \end{aligned}$$

Videre er

$$n_A - m_A\, g = 0$$

Friksjonskraften er gitt ved den kinetiske friksjonskoeffisienten og normalkraften fra underlaget:

$$f_k = \mu_k\, n_A$$

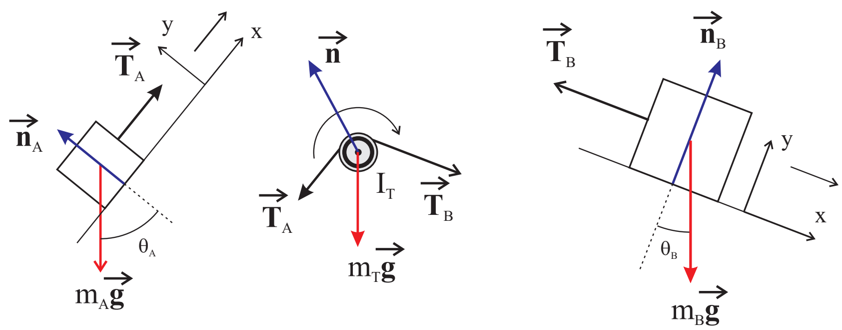
Det følger at

$$m_B\, g - \mu_k\, m_A\, g = 0$$

som gir

$$m_A = \frac{m_B}{\mu_k} = \frac{2.00\,\text{kg}}{0.400} = 5.00\,\text{kg}$$

(b) Aktuelt frilegemediagram:



Kaller klossenes felles akselerasjon i bevegelsesretningen for a. Trinsens vinkelakselerasjon gis symbolet α. Siden snoren ikke glipper under bevegelsen, må trinsens tangensielle akselerasjon være lik a. Vi har da at

$$\alpha = \frac{a}{R}$$

Vi anvender så Newtons 2. lov for bevegelsen av klossene og momentsatsen for trinsens rotasjonsbevegelse (merk at kreftene gjennom trinsens akse ikke bidrar til kraftmomentet, tilhørende armer er null):

$$\begin{aligned} T_A - m_A\, g\, \sin\theta_A &= m_A\, a \\ T_B\, R - T_A\, R &= I_T\, \frac{a}{R} \\ m_B\, g\, \sin\theta_B - T_B &= m_B\, a \end{aligned}$$

Multipliserer gjennom ligning to med $1/R$ og adderer alle tre. Da eliminerer vi snordragene T_A og T_B. Vi finner

$$(m_B\, \sin\theta_B - m_A\, \sin\theta_A)\, g = \left(m_A + m_B + \frac{I_T}{R^2}\right) a$$

slik at den søkte akselerasjonen blir

$$\begin{aligned} a &= g\, \frac{m_B\, \sin\theta_B - m_A\, \sin\theta_A}{m_A + m_B + \dfrac{I_T}{R^2}} \quad \Downarrow \\ &= (9.80\,\mathrm{m/s^2})\, \frac{(5.00\,\mathrm{kg})\, \sin(20.9^\circ) - (2.00\,\mathrm{kg})\, \sin(50.5^\circ)}{2.00\,\mathrm{kg} + 5.00\,\mathrm{kg} + \dfrac{0.0280\,\mathrm{kgm^2}}{(0.100\,\mathrm{m})^2}} \quad \Downarrow \\ &= 0.240\,\mathrm{m/s^2} \end{aligned}$$

OPPGAVE 4.

(a) Legger origo i vårt koordinatsystem til foten av klippekanten på bakkenivå.
Aktuelle bevegelsesligninger er:

$$v_{xf} = v_i \qquad x_f = v_i\, t$$

$$v_{yf} = -g\, t \qquad y_f = h - \frac{1}{2}\, g\, t^2$$

Baneligningen er da gitt ved:

$$y_f = h - \frac{1}{2}\, g \left(\frac{x_f}{v_i}\right)^2$$

I nedslagspunktet vil:

$$x_f = R = h \qquad \text{og} \qquad y_f = 0$$

Slik at

$$\begin{aligned} 0 &= h - \frac{1}{2}\, g \left(\frac{h}{v_i}\right)^2 \Downarrow \\ \frac{1}{2}\, g\, \frac{h^2}{v_i^2} &= h \Downarrow \\ v_i^2 &= \frac{1}{2}\, g\, h \Downarrow \\ v_i &= \sqrt{\frac{g\, h}{2}} \end{aligned}$$

(b) Det følger videre fra bevegelsesligningene:

$$\begin{aligned} v_{yf} &= -g\, t = -g\, \frac{x_f}{v_i} = -\frac{g\, h}{\sqrt{\frac{g\, h}{2}}} = -\sqrt{2\, g\, h} \\ v_{xf} &= v_i = \sqrt{\frac{g\, h}{2}} \end{aligned}$$

Slik at

$$\overrightarrow{\mathbf{v}}_f = v_{xf}\, \hat{\imath} + v_{yf}\, \hat{\jmath} = \sqrt{\frac{g\, h}{2}}\, \hat{\imath} - \sqrt{2\, g\, h}\, \hat{\jmath} = \sqrt{\frac{g\, h}{2}}\, (\hat{\imath} - 2\, \hat{\jmath})$$

(c) Kaller vinkelen som $\vec{\mathbf{v}}_f$ danner med x-aksen for ϕ. Det gjelder at

$$\tan\phi = \frac{v_{yf}}{v_{xf}} = \frac{-2}{1} = -2 \;\Rightarrow \phi = \arctan(-2) = -63.4^\circ$$

Alternativ løsning pkt. (a) og (b):

Bevaring av mekanisk energi i tyngdefeltet gir

$$\frac{1}{2}\, m\, v_{yf}^2 = m\, g\, h \qquad \Rightarrow \qquad v_{yf}^2 = 2\, g\, h$$

Bevegelsesligningen for v_{yf} gir oss at fortegnet til prosjektilets hastighet i y-retningen i nedslaget er negativt:

$$v_{yf} = -\sqrt{2\, g\, h}$$

Videre, fra samme ligning, finner vi at tiden til nedslag er

$$t = -\frac{v_{yf}}{g} = \frac{\sqrt{2\, g\, h}}{g}$$

Slik at

$$x_f = h = v_i\, \frac{\sqrt{2\, g\, h}}{g} \qquad \Rightarrow \qquad v_i = v_{xi} = v_{xf} = \frac{g\, h}{\sqrt{2\, g\, h}} = \sqrt{\frac{g\, h}{2}}$$

OPPGAVE 5.

(a) Nytter bevaring av mekanisk energi for systemet kule og fjær.

$$\begin{aligned} \Delta K + \Delta U_s &= 0 \Downarrow \\ (K_f - K_i) + (U_{sf} - U_{si}) &= 0 \end{aligned}$$

Siden kulen settes i bevegelse fra en tilstand i ro og fjæren verken er forlenget eller sammentrykket i sluttilstanden, vil

$$K_i = 0\,\mathrm{J} \qquad \text{og} \qquad U_{sf} = 0\,\mathrm{J}$$

Det følger at

$$\begin{aligned} K_f &= U_{si} \Downarrow \\ \frac{1}{2}\, v^2_{\mathrm{CM,A}} &= \frac{1}{2}\, k\, (\Delta l)^2 \Downarrow \\ v^2_{\mathrm{CM,A}} &= \frac{k}{m}\, (\Delta l)^2 \Downarrow \\ v_{\mathrm{CM,A}} &= \sqrt{\frac{k}{m}}\, \Delta l \Downarrow \\ v_{\mathrm{CM,A}} &= \sqrt{\frac{60.0\,\mathrm{Nm^{-1}}}{0.150\,\mathrm{kg}}} \cdot (1.40 \times 10^{-1}\,\mathrm{m}) \\ &= 2.80\,\mathrm{m/s} \end{aligned}$$

(b) Kinetisk energi for et objekt som ruller er gitt ved

$$K = \frac{1}{2}\, m\, v^2_{\mathrm{CM}} + \frac{1}{2}\, I_{\mathrm{CM}}\, \omega^2$$

Der I_{CM} er treghetsmomentet om rotasjonsaksen gjennom massesenteret. Ren rulling tilsier at

$$v_{\mathrm{CM}} = \omega\, r$$

der r er aktuell radius. For en kule, som ruller uten å gli, har vi da at

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{2}\, m\, v^2_{\mathrm{CM}} + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2}{5}\, m\, r^2\right) \cdot \left(\frac{v_{\mathrm{CM}}}{r}\right)^2 \\ &= \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{5}\right) m\, v^2_{\mathrm{CM}} \\ &= \frac{7}{10}\, m\, v^2_{\mathrm{CM}} \end{aligned}$$

(c) Arbeid-kinetisk energi teoremet sier at

$$\Delta K = K_{\mathrm{B}} - K_{\mathrm{A}} = W_{\mathrm{AB}}$$

Det følger at friksjonsarbeidet blir

$$\begin{aligned}
W_{\mathrm{AB}} &= \frac{7}{10}\,m\,v_{\mathrm{CM,B}}^2 - \frac{1}{2}\,m\,v_{\mathrm{CM,A}}^2 \;\Downarrow \\
&= \frac{7}{10}\,m\left(\frac{5}{7}\,v_{\mathrm{CM,A}}\right)^2 - \frac{1}{2}\,m\,v_{\mathrm{CM,A}}^2 \;\Downarrow \\
&= \frac{5}{14}\,m\,v_{\mathrm{CM,A}}^2 - \frac{1}{2}\,m\,v_{\mathrm{CM,A}}^2 \;\Downarrow \\
&= -\frac{1}{7}\,m\,v_{\mathrm{CM,A}}^2 \;\Downarrow \\
&= -\frac{1}{7}\cdot(0.150\,\mathrm{kg})\cdot(2.80\,\mathrm{m/s})^2 = -1.68\times 10^{-1}\,\mathrm{J}
\end{aligned}$$

(d) Nytter bevaring av mekanisk energi i tyngdefeltet:

$$\begin{aligned}
\Delta K + \Delta U_g &= 0 \;\Downarrow \\
(K_{\mathrm{C}} - K_{\mathrm{B}}) + (m\,g\,y_{\mathrm{CM,C}} - m\,g\,y_{\mathrm{CM,B}}) &= 0 \;\Downarrow \\
K_{\mathrm{C}} &= K_{\mathrm{B}} - m\,g\,(y_{\mathrm{CM,C}} - y_{\mathrm{CM,B}})
\end{aligned}$$

Siden kulen har en endelig utstrekning vil

$$y_{\mathrm{CM,C}} - y_{\mathrm{CM,B}} = R - r = (0.196\,\mathrm{m} - 0.026\,\mathrm{m}) = 0.170\,\mathrm{m}$$

Denne lengdestørrelsen er blitt gitt symbolet $R^\star$ i oppgaveteksten.

$$R^\star = 0.170\,\mathrm{m}$$

Det følger at

$$\begin{aligned}
\frac{7}{10}\,m\,v_{\mathrm{CM,C}}^2 &= \frac{7}{10}\,m\,v_{\mathrm{CM,B}}^2 - m\,g\,R^\star \;\Downarrow \\
v_{\mathrm{CM,C}}^2 &= v_{\mathrm{CM,B}}^2 - \frac{10}{7}\,g\,R^\star
\end{aligned}$$

Og vi finner at

$$\begin{aligned}
v_{\mathrm{CM,C}} &= \sqrt{\left[\frac{5}{7}\cdot(2.80\,\mathrm{m/s})\right]^2 - \frac{10}{7}\cdot(9.80\,\mathrm{m/s^2})\cdot(0.170\,\mathrm{m})} \\
&= 1.27\,\mathrm{m/s}
\end{aligned}$$

(e) Normalkraften, n_{C}, svarer for sentripetalakselerasjonen av kulen. Vi har da at

$$n_{\mathrm{C}} = m\,\frac{v_{\mathrm{CM,C}}^2}{R^\star} = (0.150\,\mathrm{kg}) \cdot \frac{(1.27\,\mathrm{m/s})^2}{0.170\,\mathrm{m}} = 1.43\,\mathrm{N}$$