BIT 100 Fysikk

Eksamen 03.12.09 - Løsningsforslag.

OPPGAVE 1.

(a) Gitt posisjonsvektoren:

$$\vec{\mathbf{r}}\,(t) = [(30.0\,\mathrm{m/s})\,t]\,\hat{\imath} + [(40.0\,\mathrm{m/s})\,t - (5.00\,\mathrm{m/s^2})\,t^2]\,\hat{\jmath}$$

(i) Momentan hastighetsvektor $\vec{\mathbf{v}}\,(t)$ er gitt ved:

$$\vec{\mathbf{v}}\,(t) = \frac{\mathrm{d}\vec{\mathbf{r}}\,(t)}{\mathrm{d}t} = (30.0\,\mathrm{m/s})\,\hat{\imath} + [(40.0\,\mathrm{m/s}) - (10.0\,\mathrm{m/s^2})\,t]\,\hat{\jmath}$$

(ii) Momentan akselerasjonsvektor $\vec{\mathbf{a}}\,(t)$ er gitt ved:

$$\vec{\mathbf{a}}\,(t) = \frac{\mathrm{d}\vec{\mathbf{v}}\,(t)}{\mathrm{d}t} = -(10.0\,\mathrm{m/s^2})\,\hat{\jmath}$$

(b) For bevegelse med konstant akselerasjon har vi bevegelsesligningene:

$$\begin{aligned}\vec{\mathbf{v}}\,(t) &= \vec{\mathbf{v}}_i + \vec{\mathbf{a}}\,t \\ \vec{\mathbf{r}}\,(t) &= \vec{\mathbf{r}}_i + \vec{\mathbf{v}}_i\,t + \frac{1}{2}\vec{\mathbf{a}}\,t^2\end{aligned}$$

Det følger at ($\vec{\mathbf{v}}_i = 0\,\mathrm{m/s}$ og $\vec{\mathbf{r}}_i = (10.0\,\mathrm{m})\,\hat{\imath}$):

(i) Hastighets og posisjonsvektor blir:

$$\vec{\mathbf{v}}\,(t) = [(6.00\,\mathrm{m/s^2})\,t\,]\,\hat{\imath} + [(4.00\,\mathrm{m/s^2})\,t\,]\,\hat{\jmath}$$

$$\begin{aligned}\vec{\mathbf{r}}\,(t) &= (10.0\,\mathrm{m})\,\hat{\imath} + [(3.00\,\mathrm{m/s^2})\,t^2\,]\,\hat{\imath} + [(2.00\,\mathrm{m/s^2})\,t^2\,]\,\hat{\jmath} \\ &= [(10.0\,\mathrm{m}) + (3.00\,\mathrm{m/s^2})\,t^2\,]\,\hat{\imath} + [(2.00\,\mathrm{m/s^2})\,t^2\,]\,\hat{\jmath}\end{aligned}$$

(ii) Fra uttrykket for posisjonsvektoren, $\vec{\mathbf{r}}(t)$, ovenfor har vi at koordinatene $x = x(t)$ og $y = y(t)$ blir:

$$
\begin{aligned}
x &= (10.0\,\mathrm{m}) + (3.00\,\mathrm{m/s^2})\,t^2 \\
y &= (2.00\,\mathrm{m/s^2})\,t^2
\end{aligned}
$$

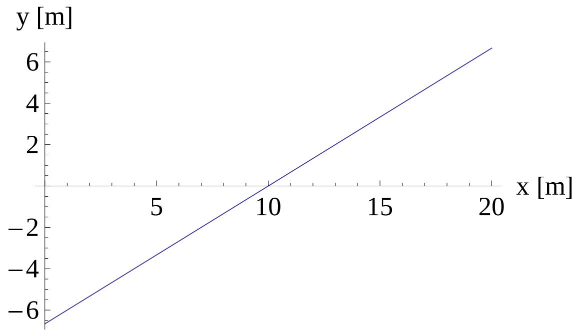
Ved å eliminere t^2 mellom disse to ligningene finner vi at

$$x = (10.0\,\mathrm{m}) + \frac{3}{2}\,y$$

eller

$$y = y(x) = \frac{2}{3}\,x - \frac{20.0}{3}\,\mathrm{m}$$

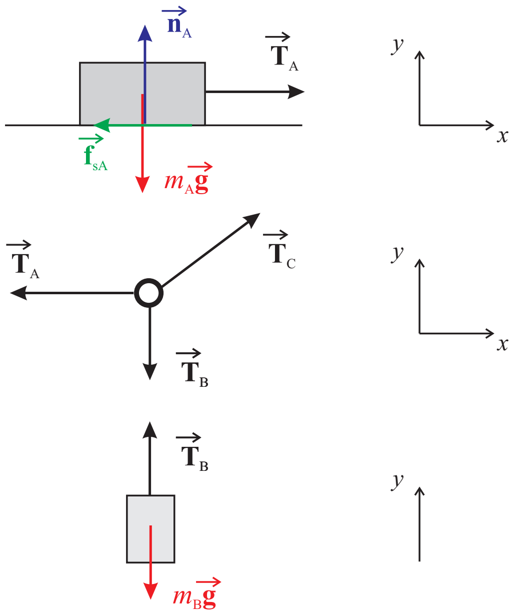
Dette er ligningen for en rett linje. Banen er skissert i figur 1.



Figur 1: Skisse av den rettlinjede banen $y(x)$.

OPPGAVE 2.

(a) Vi starter med å tegne frilegemediagrammer:



Figur 2: Frilegemediagram.

Newtons 2. lov for massen m_A:

$$\begin{aligned} T_A - f_{s\,A} &= 0 \\ n_A - m_A\,g &= 0 \end{aligned}$$

Likevekt for O-ringen:

$$\begin{aligned} T_C\,\cos\theta - T_A &= 0 \\ T_C\,\sin\theta - T_B &= 0 \end{aligned}$$

Newtons 2. lov for massen m_B:

$$T_B - m_B\,g = 0$$

Vi har videre

$$f_{s\,\text{A}} = \mu\, n_{\text{A}} = \mu\, m_{\text{A}}\, g \qquad \mu \in (0, \mu_s)$$

Det følger at:

$$\begin{aligned} T_{\text{A}} &= \mu\, m_{\text{A}}\, g \\ T_{\text{B}} &= m_{\text{B}}\, g \end{aligned}$$

samt

$$T_{\text{C}} = \frac{T_{\text{A}}}{\cos\theta} = \frac{T_{\text{B}}}{\sin\theta}$$

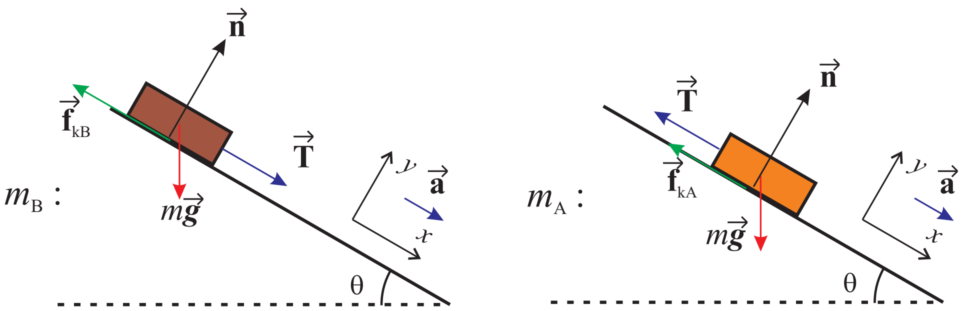
Kombinert gir dette:

$$\begin{aligned} \frac{m_{\text{B}}\, g}{\sin\theta} &= \frac{\mu\, m_{\text{A}}\, g}{\cos\theta} \quad \Updownarrow \\ m_{\text{B}} &= \mu\, m_{\text{A}}\, \tan\theta \end{aligned}$$

Maksimal verdi for massen m_{B} får vi når statisk friksjon 'utnyttes fullt ut'. Parameteren μ settes da til verdien av den statiske friksjonskoeffisienten μ_s. Maksimalverdien for m_{B}, $m_{\text{B,max}}$, blir da:

$$m_{\text{B,max}} = \mu_s\, m_{\text{A}}\, \tan\theta$$

(b) Vi starter med å tegne frilegemediagrammer for hver enkelt kloss:



Figur 3: Frilegemediagram.

Setter opp Newtons 2. lov for de to klossene. Siden de beveger seg som ett objekt, vil $a_{\text{A}x} = a_{\text{B}x} = a$, mens $a_{\text{A}y} = a_{\text{B}y} = 0$, da det ikke er akselerasjon i denne retningen. Videre setter vi $m_{\text{A}} = m_{\text{B}} = m$. Vi har:

- Masse m_{A}:

$$m\,g\,\sin\theta - f_{k\mathrm{A}} - T \;=\; m\,a$$

- Masse m_{B}:

$$T + m\,g\,\sin\theta - f_{k\mathrm{B}} \;=\; m\,a$$

- Normalkraft n:
  Siden klossenes har samme masse vil de erfare samme normalkraft:

$$n - m\,g\,\cos\theta = 0$$

For kinetisk friksjon er $f_k = \mu_k\,n$, slik at i vårt problem vil:

$$f_{k\mathrm{A}} = \mu_{\mathrm{kA}}\,n \quad \text{og} \quad f_{k\mathrm{B}} = \mu_{\mathrm{kB}}\,n$$

Kombinert sitter vi igjen med følgende to ligninger:

$$\begin{aligned} m\,g\,\sin\theta - \mu_{\mathrm{kA}}\,m\,g\,\cos\theta - T &= m\,a \\ T + m\,g\,\sin\theta - \mu_{\mathrm{kB}}\,m\,g\,\cos\theta &= m\,a \end{aligned}$$

Adderer vi disse ligningene eliminerer vi snordraget:

$$2\,m\,g\,\sin\theta - (\mu_{\mathrm{kA}} + \mu_{\mathrm{kB}})\,m\,g\,\cos\theta = 2\,m\,a$$

Og følgelig

$$\begin{aligned} a &= g\,\sin\theta - \frac{1}{2}\,(\mu_{k\mathrm{A}} + \mu_{\mathrm{kB}})\,g\,\cos\theta \\ &= g\left[\sin\theta - \frac{1}{2}\,(\mu_{\mathrm{kA}} + \mu_{\mathrm{kB}})\,\cos\theta\right] \\ &= g\,\sin\theta\left[1 - \frac{1}{2}\,(\mu_{\mathrm{kA}} + \mu_{\mathrm{kB}})\,\cot\theta\right] \end{aligned}$$

Her er $\cot\theta = \cos\theta/\sin\theta = 1/\tan\theta$.

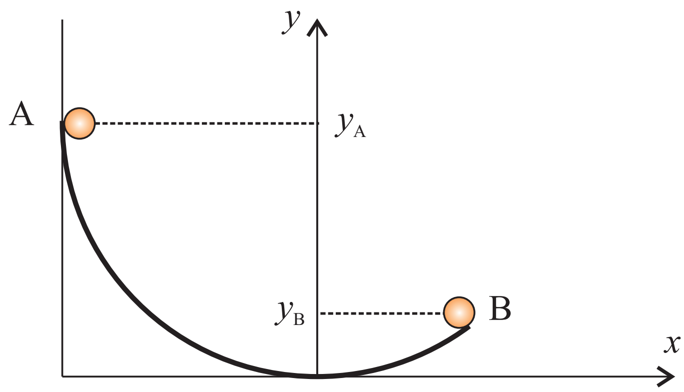
OPPGAVE 3.

(a) Samlet kinetisk energi:

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{2}\, m\, v_{\mathrm{CM}}^2 + \frac{1}{2}\, I_{\mathrm{CM}}\, \omega^2 \ \Downarrow \\ &= \frac{1}{2}\, m\, v_{\mathrm{CM}}^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\, m\, r_0^2\right)\left(\frac{v_{\mathrm{CM}}}{r_0}\right)^2 \ \Downarrow \\ &= \frac{1}{2}\, m\, v_{\mathrm{CM}}^2 + \frac{1}{3}\, m\, v_{\mathrm{CM}}^2 \\ &= \frac{5}{6}\, m\, v_{\mathrm{CM}}^2 \end{aligned}$$

Den kinetiske energien er sammensatt av et translasjonsbidrag og et rotasjonsbidrag. Rullebetingelsen gir sammenhengen mellom massesenterfarten, v_{CM}, og rotasjonsfarten, ω: $\omega = v_{\mathrm{CM}}/r_0$.

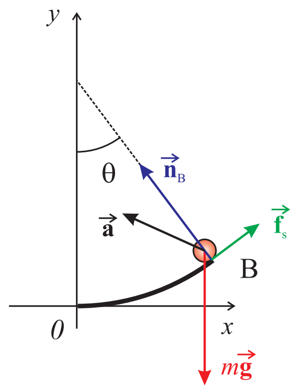
(b) Energibevaring:



Figur 4: Figuren angir aktuelle posisjoner nyttet under energibetraktningene i punkt (b). Merk at vi tar hensyn til kulens utstrekning. All posisjonsangivelse refererer til massesenteret.

$$
\begin{aligned}
m\,g\,y_{\mathrm{A}} &= m\,g\,y_{\mathrm{B}} + \frac{5}{6}\,m\,v_{\mathrm{CM,B}}^2 \;\Downarrow \\
v_{\mathrm{CM,B}}^2 &= \frac{6}{5}\,g\,(y_{\mathrm{A}} - y_{\mathrm{B}}) \;\Downarrow \\
&= \frac{6}{5}\,g\,\{R_0 - [R_0 - (R_0 - r_0)\,\cos\theta]\} \;\Downarrow \\
&= \frac{6}{5}\,g\,(R_0 - r_0)\,\frac{4}{5} \;\Updownarrow \\
&= \frac{24}{25}\,g\,(R_0 - r_0) \;\Downarrow \\
v_{\mathrm{CM,B}} &= \frac{2}{5}\sqrt{6\,g\,(R_0 - r_0)}
\end{aligned}
$$

(c)

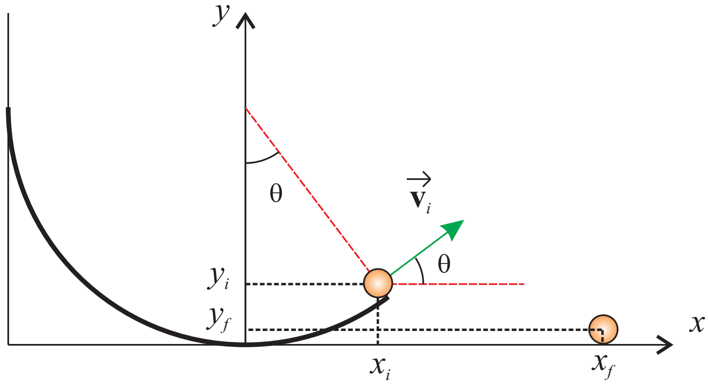


Figur 5: Frilegemediagram for ballen i posisjon B. Friksjonskraftens retning bestemmes ved at det tilhørende momentet skal redusere ballens vinkelhastighet.

Nettokraften mot banens sentrum svarer for ballens sentripetalakselerasjon.

$$
\begin{aligned}
n_{\mathrm{B}} - m\,g\,\cos\theta &= m\,\frac{v_{\mathrm{CM,B}}^2}{R_0 - r_0} \;\Downarrow \\
n_{\mathrm{B}} &= m\,g\,\frac{4}{5} + m\,\frac{24}{25}\,g \\
&= \frac{44}{25}\,m\,g
\end{aligned}
$$

(d) Vi har nå en prosjektilbevegelse 'styrt av' gravitasjon.



Figur 6: Figur som angir begynnelse og sluttposisjonene for 'prosjektil'-bevegelsen. All posisjonsangivelse refererer seg til massesenteret.

Koordinater begynnelsespunkt:

$$\begin{aligned} x_i &= x_\mathrm{B} = (R_0 - r_0)\,\sin\theta \\ y_i &= y_\mathrm{B} = \;R_0 - (R_0 - r_0)\,\cos\theta \end{aligned}$$

x og y-komponentene av begynnelseshastigheten.

$$\begin{aligned} v_{xi} &= v_{\mathrm{CM,B}}\,\cos\theta \\ v_{yi} &= v_{\mathrm{CM,B}}\,\sin\theta \end{aligned}$$

Koordinater sluttpunkt:

$$\begin{aligned} x_f &= x_\mathrm{C} \quad \text{størrelsen vi søker} \\ y_f &= y_\mathrm{C} = r_0 \end{aligned}$$

Aktuelle tallverdier:

$$v_{\mathrm{CM,B}} = \frac{2}{5}\sqrt{6\cdot(9.80\,\mathrm{m/s^2})\cdot[\,(45.7-3.2)\times10^{-2}\,\mathrm{m}]} = 2.00\,\mathrm{m/s}$$

$$\begin{aligned} v_{xi} &= \frac{4}{5}\,v_{\mathrm{CM,B}} = 1.60\,\mathrm{m/s} \\ v_{yi} &= \frac{3}{5}\,v_{\mathrm{CM,B}} = 1.20\,\mathrm{m/s} \\ x_i &= \frac{3}{5}\,(R_0 - r_0) = 0.255\,\mathrm{m} \\ y_f - y_i &= -[(R_0 - r_0)\,(1-\cos\theta)] = -\frac{1}{5}\,(R_0 - r_0) = -0.085\,\mathrm{m} \end{aligned}$$

Bevegelsesligningen for ballens y-posisjon gir oss da en annengradsligning (enheter er utelatt, $[t] = \mathrm{s}$) for t, tidsintervallet fra ballen forlater banen til den lander.

$$\begin{aligned} 4.90\,t^2 - 1.20\,t - 0.085 &= 0 \ \Downarrow \\ t &= \frac{1.20 + \sqrt{(1.20)^2 + (0.34)\cdot(4.90)}}{9.80}\,\mathrm{s} \\ &= 0.302\,\mathrm{s} \end{aligned}$$

En har her nyttet +fortegnet foran $\sqrt{}$. Det negative fortegnet er forkastet da det vil gi $t < 0$ ('negativ tid'). I praksis svarer dette til løsningen en ville få dersom en kunne forlenge banebevegelsen mot venstre.

Dette gir oss verdien for x-koordinaten til landingspunktet, $x_f = x_{\mathrm{C}}$:

$$\begin{aligned} x_{\mathrm{C}} &= x_f = x_i + v_{xi}\,t \\ &= 0.255\,\mathrm{m} + (1.60\,\mathrm{m/s})\cdot(0.302\,\mathrm{s}) \\ &= 0.738\,\mathrm{m} \end{aligned}$$

(e) Fra bevegelsesligningene har vi at ballens hastighetskomponenter i x -og y-retning i landingsøyeblikket er:

$$\begin{aligned} v_{\mathrm{CM,C}x} &= v_{xf} = v_{xi} = 1.60\,\mathrm{m/s} \\ v_{\mathrm{CM,C}y} &= v_{yf} = v_{yi} - g\,t = 1.20\,\mathrm{m/s} - (9.80\,\mathrm{m/s^2})\cdot(0.302\,\mathrm{s}) = -1.76\,\mathrm{m/s} \end{aligned}$$

Og massesenterfarten i landingsøyeblikket, $v_{\mathrm{CM,C}}$, blir følgelig:

$$v_{\mathrm{CM,C}} = \sqrt{v^2_{\mathrm{CM,C}x} + v^2_{\mathrm{CM,C}y}} = 2.38\,\mathrm{m/s}$$

Siden ballen ikke erfarer noe netto kraftmoment under bevegelsen fra B til C, vil rotasjonshastigheten ikke endre seg:

$$\omega_{\mathrm{C}} = \omega_{\mathrm{B}} = \frac{v_{\mathrm{CM,B}}}{r_0} = \frac{2.00\,\mathrm{m/s}}{(3.20\times 10^{-2}\,\mathrm{m})} = 62.5\,\mathrm{rad/s}$$

OPPGAVE 4.

(a) Treghetsmomentet om massesenteret, I_{CM}, er gitt ved:

$$\begin{aligned} I_{\text{CM}} &= \int x^2\,\mathrm{d}m \\ &= \frac{M}{d}\int_{-d/2}^{d/2} x^2\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{M}{d}\left[\frac{1}{3}x^3\Big|_{-d/2}^{d/2}\right] \\ &= \frac{1}{3}\frac{M}{d}\left[\frac{d^3}{8}-\left(-\frac{d^3}{8}\right)\right] \\ &= \frac{1}{12}M\,d^2 \end{aligned}$$

(b) Nytter Steiners sats til å forskyve rotasjonsaksen fra CM til O:

$$\begin{aligned} I_{\text{O}} &= I_{\text{CM}} + M\left(\frac{d}{2}\right)^2 \\ &= \frac{1}{12}M\,d^2 + \frac{1}{4}M\,d^2 \\ &= \frac{1}{3}M\,d^2 \end{aligned}$$

Samlet bidrag fra alle fire stengene gir oss da det søkte treghetsmomentet:

$$I = 4\,I_{\text{O}} = \frac{4}{3}M\,d^2$$

(c) Kaller spinnet til kulen om O for $\overrightarrow{\mathbf{L}}_{\text{K}}$. Det følger at umiddelbart før støtet vil:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\mathbf{L}}_{\text{K}} &= \overrightarrow{\mathbf{r}} \times \overrightarrow{\mathbf{p}} \\ &= m_{\text{K}}\,(\overrightarrow{\mathbf{r}} \times \overrightarrow{\mathbf{v}}_i) \\ &= \frac{1}{3}M\;[d\,\hat{\imath} \times v_i\,(-\sin\theta\,\hat{\imath} + \cos\theta\,\hat{\jmath})] \\ &= \frac{1}{3}M\,d\,v_i\,\cos\theta\,(\hat{\imath}\times\hat{\jmath}) \\ &= \frac{1}{3}M\,d\,v_i\,\cos\theta\,\hat{k}\ . \end{aligned}$$

(d) Tilsvarende kalles spinnet til 'krysset' om O for $\vec{\mathbf{L}}_{\mathrm{k}}$.

$$\begin{aligned}
\vec{\mathbf{L}}_{\mathrm{k}} &= I\,\vec{\boldsymbol{\omega}}_i \\
&= -\frac{4}{3}\,M\,d^2\,\omega_i\,\hat{k}
\end{aligned}$$

Her er $\omega_i = |\vec{\boldsymbol{\omega}}_i| = 2.00\,\mathrm{rad/s}$.

Systemets samlede spinn, $\vec{\mathbf{L}}_i$, umiddelbart før støtet er da:

$$\begin{aligned}
\vec{\mathbf{L}}_i &= \frac{1}{3}\,M\,d\,(v_i\,\cos\theta - 4\,d\,\omega_i)\,\hat{k}\ \Downarrow \\
&= \frac{1}{3}\cdot(0.300\,\mathrm{kg})\cdot(0.500\,\mathrm{m})\,[(12.0\,\mathrm{m/s})\cdot 0.500 - 4\cdot(0.500\,\mathrm{m})\cdot(2.00\,\mathrm{rad/s})]\,\hat{k} \\
&= (0.100\,\mathrm{kgm^2/s})\,\hat{k}
\end{aligned}$$

(e) Systemet erfarer ikke noe netto ytre kraftmoment i z-retningen. Rotasjonsaksen er friksjonsløs og tyngdekraften bidrar ikke til noe kraftmoment i z-retningen. Spinnsatsen gir oss da:

$$\frac{\mathrm{d}L_z}{\mathrm{d}\,t} = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad L_{zi} = L_{zf}$$

Systemet 'kryss' + kule har treghetsmomentet I' om rotasjonsaksen.

$$\begin{aligned}
I' &= I + m_{\mathrm{K}}\,d^2 \\
&= \frac{4}{3}\,M\,d^2 + \frac{1}{3}\,M\,d^2 \\
&= \frac{5}{3}\,M\,d^2\ \Downarrow \\
&= \frac{5}{3}\,(0.300\,\mathrm{kg})\cdot(0.500\,\mathrm{m})^2 \\
&= 0.125\,\mathrm{kgm^2}
\end{aligned}$$

Bevaring av systemets spinn i kollisjonen gir oss:

$$\begin{aligned} I'\,\omega_f &= L_{zi} \;\Downarrow \\ (0.125\,\mathrm{kgm}^2)\,\omega_f &= (0.100\,\mathrm{kgm}^2/\mathrm{s}) \;\Downarrow \\ \omega_f &= 0.800\,\mathrm{rad/s} \end{aligned}$$

Rotasjonen er positiv (mot klokken, høyrehåndsbevegelse når tommelen er rettet langs z-aksen). ‘Krysset’ + kule har motsatt omløpsretning enn den ‘krysset’ hadde innledningsvis.