Universitetet i Stavanger

DET TEKNISK – NATURVITENSKAPELIGE FAKULTET

Eksamen i fag BIT 100	:	FYSIKK
Tid for eksamen	:	Torsdag 3. desember 2009. kl. 0900 - 1400 .
Tillatte hjelpemidler	:	Bestemt enkel kalkulator.
Vedlagt	:	BIT100 Fysikk – formelark (s. 9–10).

Oppgavesettet består av 4 oppgaver på 8 sider.

LYKKE TIL!

OPPGAVE 1.

(a) Posisjonsvektoren til en partikkel er gitt ved:

$$\overrightarrow{\mathbf{r}}(t) = [(30.0\,\mathrm{m/s})\,t]\,\hat{\imath} + [(40.0\,\mathrm{m/s})\,t - (5.00\,\mathrm{m/s^2})\,t^2]\,\hat{\jmath}\ .$$

Her er $[t] = \mathrm{s}$.

(i) Bestem momentan hastighetsvektor $\overrightarrow{\mathbf{v}}(t)$.

(ii) Bestem momentan akselerasjonsvektor $\overrightarrow{\mathbf{a}}(t)$.

(b) En partikkel har en konstant akselerasjon gitt ved:

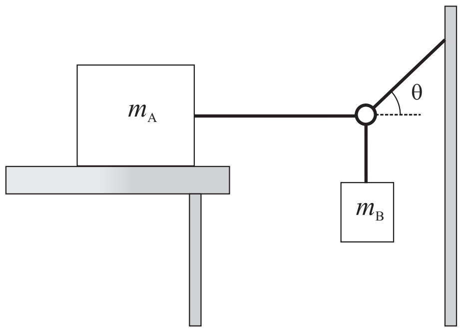
$$\overrightarrow{\mathbf{a}} = (6.00\,\mathrm{m/s^2})\,\hat{\imath} + (4.00\,\mathrm{m/s^2})\,\hat{\jmath}\ .$$

Ved tidspunktet $t = 0.00\,\mathrm{s}$ er partikkelens hastighet $\overrightarrow{\mathbf{v}}_i = 0\,\mathrm{m/s}$ og dens posisjon $\overrightarrow{\mathbf{r}}_i = (10.0\,\mathrm{m})\,\hat{\imath}$.

(i) Bestem hastighetsvektoren, $\overrightarrow{\mathbf{v}}(t)$, og posisjonsvektoren, $\overrightarrow{\mathbf{r}}(t)$, som funksjon av tiden.

(ii) Bestem ligningen, $y(x)$, for partikkelens bane i xy-planet.
Skissér banen.

OPPGAVE 2.

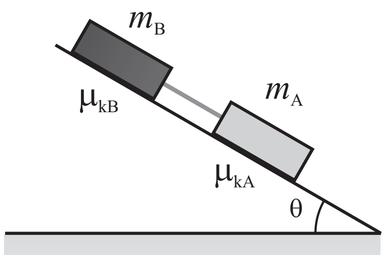


Figur 1: System av masser i ro.

Klossen på bordet i figur 1 har massen m_A. Statisk friksjonskoeffisient mellom denne klossen og bordet er μ_s.
En masse m_B er knyttet til O-ringen med en vertikal snor.
Snoren mellom klossen på bordet og O-ringen er horisontal, mens snoren fra O-ringen til veggen danner vinkelen θ med horsiontalen.
Snorene og O-ringen kan regnes som masseløse.

(a) Finn et uttrykk for den største verdien som massen m_B kan ha, når de to massene, m_A og m_B, skal være i ro.

To klosser som er forbundet med en snor, sklir nedover et skråplan med helningsvinkel θ, som vist i figur 2.



Figur 2: System av masser som beveger seg med konstant akselerasjon nedover et skråplan.

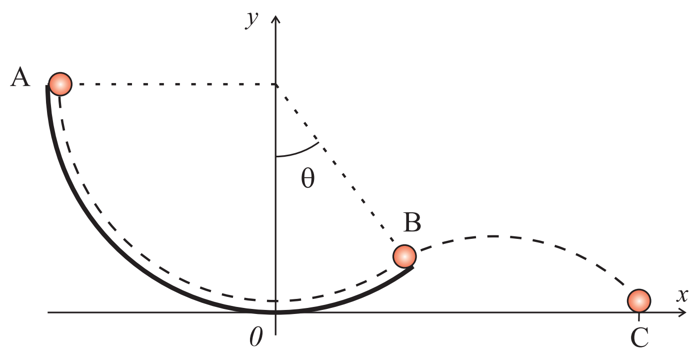
Begge klossene har samme masse, $m_A = m_B = m$, men de kinetiske friksjonskoeffisientene mellom klossene og underlaget er forskjellige, $\mu_{kB} > \mu_{kA}$. Klossene sklir derfor nedover mens snoren mellom dem forblir stram.

(b) Bestem et uttrykk for klossenes akselerasjon a.

OPPGAVE 3.

En ball med radius r_0 og masse m ruller langs en sirkelformet bane som har radius R_0. Banens 'tykkelse' kan en se bort ifra. Bunnen av banen er lagt til bakkenivå.
Ballen modelleres som et tynt kuleskall, og treghetsmomentet om dens massesenter, I_{CM}, er følgelig:

$$I_{\text{CM}} = \frac{2}{3}\, m\, r_0^2 \ .$$



Figur 3: Ball på bane med påfølgende prosjektilbevegelse.

Ballen starter fra en tilstand i ro i punktet A der banetangenten er vertikal. Den ruller nedover banen uten å skli.
Vinkelen θ på figuren ovenfor er gitt ved:

$$\sin\theta = \frac{3}{5} \qquad \text{og} \qquad \cos\theta = \frac{4}{5} \ .$$

(a) Vis at ballens samlede kinetiske energi, K, under rullebevegelsen, kan uttrykkes ved:

$$K = \frac{5}{6}\, m\, v_{\text{CM}}^2 \ .$$

v_{CM} er massesenterfarten til ballen.

(b) Benytt energibetraktning til å vise at ballens massesenterfart i punktet B, $v_{\text{CM,B}}$, er gitt som:

$$v_{\text{CM,B}} = \frac{2}{5}\sqrt{6\,g\,(R_0 - r_0)}\ .$$

g er tyngdens akselerasjon.

(c) Tegn frilegemediagram for ballen i punktet B i banen.
Bestem et uttrykk for normalkraften som virker fra banen på ballen i dette punktet.

I det videre skal også tallverdier beregnes. Følgende størrelser er oppgitt:

Ballens radius:	r_0	=	3.20 cm
Banens radius:	R_0	=	45.7 cm
Ballens masse:	m	=	57.0 g
Tyngdens akselerasjon:	g	=	9.80 m/s^2

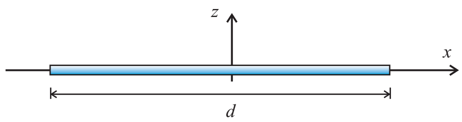
I det ballen forlater banen, vil bevegelsen til dens massesenter være bestemt av tyngdekraften (en ser bort i fra luftmotstanden). Ballen treffer bakken i punktet C.

(d) Bestem verdien av posisjonskoordinaten, x_{C}, til punktet C der ballen treffer bakken.
Origo i xy-koordinatsystemet er lagt til bunnen av banen, som vist i figur 3.

(e) Hva er ballens massesenterfart, $v_{\text{CM,C}}$, og størrelsen på dens rotasjonshastighet, ω_{C}, idet den treffer bakken?

OPPGAVE 4.

En uniform tynn stang vist i figur 4, har lengden d og massen M.

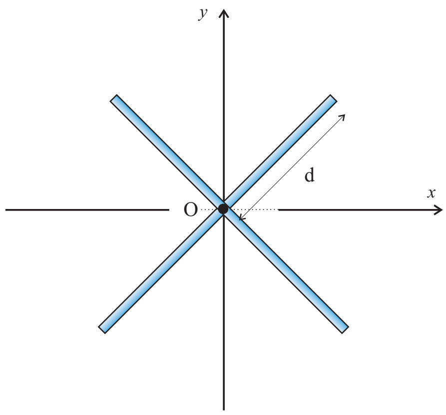


Figur 4: Tynn stang med lengde d.

(a) Vis ved integrasjon at stangens treghetsmoment, I_{CM}, om z-aksen gjennom dens massesenter er gitt ved uttrykket:

$$I_{\mathrm{CM}} = \frac{1}{12}\, M\, d^2 \ .$$

Fire slike stenger settes sammen til et 'kryss' som vist i figur 5. 'Krysset' ligger i horisontalplanet. En vertikal rotasjonsakse (langs z-aksen) går gjennom dets massesenter. 'Krysset' kan rotere friksjonsfritt om aksen. For den gitte geometrien uttrykkes tyngdens akselerasjon ved $\overrightarrow{\mathbf{g}} = -g\,\hat{k}$.



Figur 5: 'Kryss' av fire identiske stenger. 'Kryssets' massesenter faller sammen med origo i koordinatsystemet: O .

(b) Bestem et uttrykk for 'kryssets' treghetsmoment, I, om rotasjonsaksen.

Aktuelle tallverdier er:

Lengden til hver stang:	d	$=$	$0.500\,\mathrm{m}$
Massen til hver stang:	M	$=$	$0.300\,\mathrm{kg}$
Tyngdens akselerasjon:	g	$=$	$9.80\,\mathrm{m/s^2}$

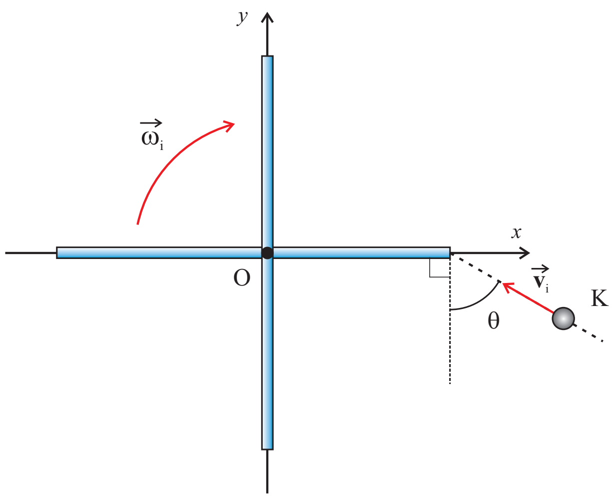
'Krysset' roterer med klokken i horisontalplanet om rotasjonsaksen. Se figur 6. Vinkelhastigheten er innledningsvis:

$$\vec{\boldsymbol{\omega}}_i = -(2.00\,\mathrm{rad/s})\,\hat{k}\ .$$

En kule, K, av modellérleire med masse $m_{\mathrm{K}} = \frac{1}{3}\,M$, beveger seg langs en rett linje i horisontalplanet med hastighetsvektoren:

$$\vec{\mathbf{v}}_i = v_i\,(-\sin\theta\,\hat{\imath} + \cos\theta\,\hat{\jmath})\ .$$

Vinkelen θ har verdien $\theta = 60.0°$.
Farten $v_i = 12.0\,\mathrm{m/s}$.
Kulen treffer og fester seg til enden av en av stengene som vist i figur 6.



Figur 6: System av 'kryss' og kule. Begynnelsestilstand.

(c) Vis at kulens spinn, $\overrightarrow{\mathbf{L}}_{\mathrm{K}}$, om O, umiddelbart før kollisjonen, er gitt ved uttrykket:

$$\overrightarrow{\mathbf{L}}_{\mathrm{K}} = \frac{1}{3} M \, d \, v_i \, \cos\theta \, \hat{k} \ .$$

(d) Bestem, uttrykk og tallverdi, for systemets samlede spinn, $\overrightarrow{\mathbf{L}}_i$, om O umiddelbart før kollisjonen. Med system forstår vi 'kryss' pluss leirkule.

Etter kollisjonen vil systemet rotere med en felles vinkelhastighet:

$$\overrightarrow{\boldsymbol{\omega}}_f = \omega_f \, \hat{k} \ .$$

(e) Forklar hvorfor z-komponenten til systemets spinn, L_z, om O er bevart under kollisjonen.
Beregn størrelsen av vinkelhastigheten, ω_f, etter kollisjonen.
Angi rotasjonsretningen etter kollisjonen.

BIT100 Fysikk – formelark

Rotasjon om en fast akse	**Éndimensjonal bevegelse**
Vinkelhastighet $\omega = \frac{d\theta}{dt}$	Hastighet $v = \frac{dx}{dt}$
Vinkelakselerasjon $\alpha = \frac{d\omega}{dt}$	Akselerasjon $a = \frac{dv}{dt}$
Resultantmomentet $\sum_i \tau_i = I\,\alpha$	Resultantkraften $\sum_i F_i = m\,a$
$\alpha = \text{konstant} \begin{cases} \omega_f = \omega_i + \alpha\,t \\ \theta_f = \theta_i + \omega_i\,t + \frac{1}{2}\alpha\,t^2 \\ \omega_f^2 = \omega_i^2 + 2\,\alpha\,(\theta_f - \theta_i) \\ \theta_f = \theta_i + \frac{1}{2}\,(\omega_i + \omega_f)\,t \end{cases}$	$a = \text{konstant} \begin{cases} v_f = v_i + a\,t \\ x_f = x_i + v_i\,t + \frac{1}{2}a\,t^2 \\ v_f^2 = v_i^2 + 2\,a\,(x_f - x_i) \\ x_f = x_i + \frac{1}{2}\,(v_i + v_f)\,t \end{cases}$
Arbeid $W = \int_{\theta_i}^{\theta_f} \tau\,d\theta$	Arbeid $W = \int_{x_i}^{x_f} F\,dx$
Kinetisk energi $K = \frac{1}{2}\,I\,\omega^2$	Kinetisk energi $K = \frac{1}{2}\,m\,v^2$
Effekt $\mathcal{P} = \tau\,\omega$	Effekt $\mathcal{P} = F\,v$
Spinn $L = I\,\omega$	Bevegelsesmengde $p = m\,v$
Spinnsatsen $\sum_i \tau_i = \frac{dL}{dt}$	Newtons 2. lov $\sum_i F_i = \frac{dp}{dt}$

Generelle sammenhenger	
Bevegelse med konstant akselerasjon	$\begin{cases} \vec{\mathbf{v}}_f = \vec{\mathbf{v}}_i + \vec{\mathbf{a}}\,t \\ \vec{\mathbf{r}}_f = \vec{\mathbf{r}}_i + \vec{\mathbf{v}}_i\,t + \frac{1}{2}\,\vec{\mathbf{a}}\,t^2 \end{cases}$
Newtons 2. lov	$\sum_i \vec{\mathbf{F}}_i = m\,\vec{\mathbf{a}}$
Arbeid	$W = \int \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{r}}$
Arbeid-kinetisk energi teoremet	$\Delta K = W$
Bevegelsesmengde	$\vec{\mathbf{p}} = m\,\vec{\mathbf{v}}$
Newtons 2. lov	$\sum_i \vec{\mathbf{F}}_i = \frac{d\vec{\mathbf{p}}}{dt}$
Impuls	$\vec{\mathbf{I}} = \int \vec{\mathbf{F}}\,dt$
Impuls-bevegelsesmengde teoremet	$\Delta\vec{\mathbf{p}} = \vec{\mathbf{I}}$
Massesenter	$\vec{\mathbf{r}}_{\text{CM}} = \frac{1}{M}\int \vec{\mathbf{r}}\,dm$
Treghetsmoment	$I = \int r^2\,dm$
Steiners sats (parallellakseteoremet)	$I = I_{\text{CM}} + M\,D^2$
Kraftmoment	$\vec{\boldsymbol{\tau}} = \vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{F}}$
Spinn	$\vec{\mathbf{L}} = \vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{p}}$
Spinnsatsen	$\frac{d\vec{\mathbf{L}}}{dt} = \sum_i \vec{\boldsymbol{\tau}}_i$
Sirkelbevegelse	$s = r\,\theta,\ v = r\,\omega,\ a_c = r\,\omega^2,\ a_t = r\,\alpha$

Matematiske sammenhenger

Vektorrelasjoner	
Prikkprodukt	$\overrightarrow{\mathbf{A}} \cdot \overrightarrow{\mathbf{B}} = \lvert\overrightarrow{\mathbf{A}}\rvert\,\lvert\overrightarrow{\mathbf{B}}\rvert\,\cos\phi$
Absoluttverdi av kryssprodukt	$\lvert\overrightarrow{\mathbf{A}} \times \overrightarrow{\mathbf{B}}\rvert = \lvert\overrightarrow{\mathbf{A}}\rvert\,\lvert\overrightarrow{\mathbf{B}}\rvert\,\sin\phi$

Trigonometri	
Definisjoner	$\tan A = \frac{\sin A}{\cos A}$
Identiteter	$\sin^2 A + \cos^2 A = 1$
	$\sin 2A = 2\,\sin A\,\cos A$
	$\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A = 2\,\cos^2 A - 1 = 1 - 2\,\sin^2 A$
	$\sin(A \pm B) = \sin A\,\cos B \pm \cos A\,\sin B$
	$\cos(A \pm B) = \cos A\,\cos B \mp \sin A\,\sin B$
Deriverte	$\frac{d\sin A}{dA} = \cos A$
	$\frac{d\cos A}{dA} = -\sin A$

2. grads ligning	
Ligning	$a\,t^2 + b\,t + c = 0$
Løsning	$t = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4\,a\,c}}{2\,a}$

Ligningen for en rett linje	
Gitt to punkter på linjen	$y = y_1 + \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\,(x - x_1)$