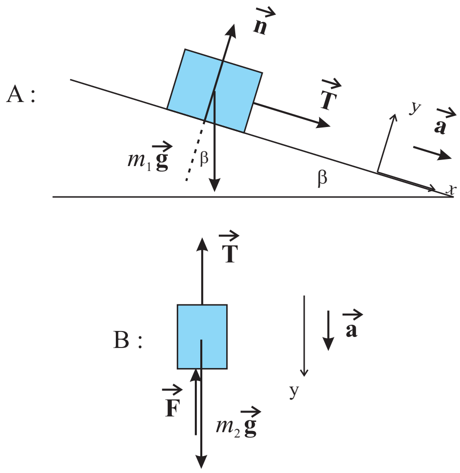
BIT 100 Fysikk

Eksamen 06.12.10 - Løsningsforslag.

OPPGAVE 1.

(a) Frilegemediagram:



(b)
- Newtons 2. lov for kasse A : x-retning:

$$T + m_1\, g\, \sin\beta = m_1\, a \tag{1}$$

- Newtons 2. lov for kasse B : y-retning:

$$m_2\, g - F - T = m_2\, a \tag{2}$$

Det følger at strekkraften er gitt ved ligning (2):

$$\begin{aligned} T &= m_2\,(g - a) - F \\ &= (2.00\,\mathrm{kg}) \cdot (9.80\,\mathrm{m/s^2} - 5.50\,\mathrm{m/s^2}) - 6.00\,\mathrm{N} \\ &= 8.60\,\mathrm{N} - 6.00\,\mathrm{N} = 2.60\,\mathrm{N} \end{aligned}$$

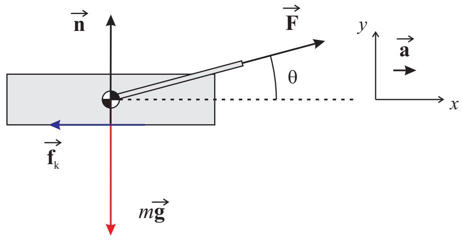
(c) Fra ligning (1) følger det at:

$$\begin{aligned} \sin\beta &= \frac{m_1\, a - T}{m_1\, g} \\ &= \frac{(1.00\,\mathrm{kg}) \cdot (5.50\,\mathrm{m/s^2}) - 2.60\,\mathrm{N}}{(1.00\,\mathrm{kg}) \cdot (9.80\,\mathrm{m/s^2})} \\ &= \frac{2.90\,\mathrm{N}}{9.80\,\mathrm{N}} = 0.2959 \end{aligned}$$

Slik at aktuell verdi for vinkelen β blir:

$$\beta = \arcsin(0.2959) = 17.2^\circ$$

(d)
- Frilegemediagram:



- Newtons 2. lov i x-retningen:

$$F\,\cos\theta - f_k = m\,a \tag{3}$$

- Newtons 2. lov i y-retningen:

$$n + F\,\sin\theta - m\,g = 0 \tag{4}$$

- Sammenhengen mellom kinetisk friksjonskraft og normalkraften fra underlaget::

$$f_k = \mu_k\,n \tag{5}$$

der μ_k er kinetisk friksjonskoeffisient.

Kombinerer ligningene (4) og (5):

$$f_k = \mu_k\,(m\,g - F\,\sin\theta)$$

som innsatt i ligning (3) gir:

$$\begin{aligned} m\,a &= F\,\cos\theta - \mu_k\,(m\,g - F\,\sin\theta) \;\Downarrow \\ a &= \frac{F}{m}\cos\theta - \mu_k\left(g - \frac{F}{m}\sin\theta\right) \end{aligned}$$

OPPGAVE 2.

(a) For den sammensatte bevegelsen av translasjon og rotasjon, som rulling representerer, er den totale kinetisk energi gitt ved:

$$K = \frac{1}{2}\, M\, v_{\text{CM}}^2 + \frac{1}{2}\, I\, \omega^2$$

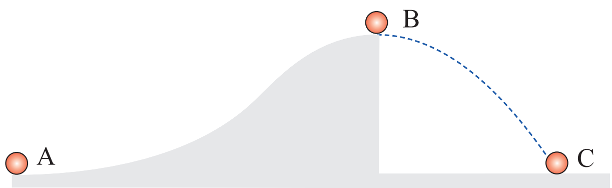
Ved ren rullebevegelse gjelder følgende sammenheng mellom massesenterfarten, v_{CM} og rotasjonshastigheten ω:

$$v_{\text{CM}} = \omega\, R$$

der R er aktuell radius. For en massiv kule med uniform tetthet er total kinetisk energi:

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{2}\, M\, v_{\text{CM}}^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}\, M\, R^2\right)\left(\frac{v_{\text{CM}}}{R}\right)^2 \\ &= \frac{1}{2}\, M\, v_{\text{CM}}^2 + \frac{1}{5}\, M\, v_{\text{CM}}^2 \\ &= \frac{7}{10}\, M\, v_{\text{CM}}^2 \end{aligned}$$

Nytter bokstavkodene A, B og C, til å betegne ulike posisjoner under kulens bevegelse.



(b) Vi ser på bevaring av mekanisk energi, $E_{\text{mek}} = K + U_g$, under bevegelsen fra A til B. U_g representerer kulens potensielle energi i tyngdefeltet.

$$\begin{aligned} \Delta E_{\text{mek}} &= 0 \ \Downarrow \\ (K_{\text{B}} - K_{\text{A}}) + M\, g\, (y_{\text{B}} - y_{\text{A}}) &= 0 \ \Downarrow \\ K_{\text{B}} &= K_{\text{A}} - M\, g\, (y_{\text{B}} - y_{\text{A}}) \ \Downarrow \\ K_{\text{B}} &= K_{\text{A}} - M\, g\, H \end{aligned}$$

Og følgelig:

$$\begin{aligned} \frac{7}{10}\, M\, v_{\text{CM,B}}^2 &= \frac{7}{10}\, M\, v_{\text{CM,A}}^2 - M\, g\, H \ \Downarrow \\ v_{\text{CM,B}}^2 &= v_{\text{CM,A}}^2 - \frac{10}{7}\, g\, H \ \Downarrow \\ v_{\text{CM,B}} &= \sqrt{v_{\text{CM,A}}^2 - \frac{10}{7}\, g\, H} \end{aligned}$$

Med det aktuelle tallmaterialet:

$$\begin{aligned}
v_{\mathrm{CM,B}} &= \sqrt{(25.0\,\mathrm{m/s})^2 - \frac{10}{7}\cdot(9.80\,\mathrm{m/s^2})\cdot(28.0\,\mathrm{m})} \\
&= \sqrt{(25.0\,\mathrm{m/s})^2 - (14.0\,\mathrm{m/s^2})\cdot(28.0\,\mathrm{m})} = 15.3\,\mathrm{m/s}
\end{aligned}$$

(c) I den videre bevegelsen, utfor skrenten, erfarer kulen tyngdekraften alene. Siden denne ikke gir opphav til noe kraftmoment om kulens massesenter, vil kulens rotasjonshastighet være uendret under bevegelsen fra B til C. Endringen i kinetisk energi vil da svare til endringen i translasjonsdelen alene. Nytter igjen bevaring av mekanisk energi, $K + U_g$:

$$\begin{aligned}
\Delta K + \Delta U_g &= 0 \;\Downarrow \\
(K_{\mathrm{C}} - K_{\mathrm{B}}) + M\,g\,(y_{\mathrm{C}} - y_{\mathrm{B}}) &= 0 \;\Downarrow \\
K_{\mathrm{C}} &= K_{\mathrm{B}} + M\,g\,H \;\Downarrow \\
\frac{1}{2}\,M\,v_{\mathrm{CM,C}}^2 + \frac{1}{2}\,I_{\mathrm{CM}}\,\omega_{\mathrm{B}}^2 &= \frac{1}{2}\,M\,v_{\mathrm{CM,B}}^2 + \frac{1}{2}\,I_{\mathrm{CM}}\,\omega_{\mathrm{B}}^2 + M\,g\,H \;\Downarrow \\
v_{\mathrm{CM,C}}^2 &= v_{\mathrm{CM,B}}^2 + 2\,g\,H \;\Downarrow \\
v_{\mathrm{CM,C}}^2 &= v_{\mathrm{CM,A}}^2 - \frac{10}{7}\,g\,H + 2\,g\,H \;\Downarrow \\
v_{\mathrm{CM,C}}^2 &= v_{\mathrm{CM,A}}^2 + \frac{4}{7}\,g\,H \;\Downarrow \\
v_{\mathrm{CM,C}} &= \sqrt{v_{\mathrm{CM,A}}^2 + \frac{4}{7}\,g\,H}
\end{aligned}$$

Aktuelle tallverdi:

$$\begin{aligned}
v_{\mathrm{CM,C}} &= \sqrt{(25.0\,\mathrm{m/s})^2 + \frac{4}{7}\cdot(9.80\,\mathrm{m/s^2})\cdot(28.0\,\mathrm{m})} \\
&= \sqrt{(25.0\,\mathrm{m/s})^2 + (5.60\,\mathrm{m/s^2})\cdot(28.0\,\mathrm{m})} = 28.0\,\mathrm{m/s}
\end{aligned}$$

(d) Banebevegelsen fra B til C analyseres som en *prosjektil*-bevegelse. Nytter bevegelsesligningene for x og y-posisjonene. Origo i koordinatsystemet legges til bunn av skrenten.

- Begynnelsesposisjon:

$$(x_i, y_i) = (x_{\mathrm{B}}, y_{\mathrm{B}}) = (0\,\mathrm{m}, H)$$

- Begynnelseshastighet:

$$(v_{xi}, v_{yi}) = (v_{\mathrm{CM,B}}, 0\,\mathrm{m/s})$$

- Aktuelle ligninger:

$$\begin{aligned} x_{\mathrm{C}} &= v_{\mathrm{CM,B}}\, t \\ y_{\mathrm{C}} &= H - \frac{1}{2}\, g\, t^2 \end{aligned}$$

- Sluttposisjon er gitt ved at $y_{\mathrm{C}} = 0\,\mathrm{m}$.

Det følger at

$$\frac{1}{2}\, g \left(\frac{x_{\mathrm{C}}}{v_{\mathrm{CM,B}}} \right)^2 = H \quad \Rightarrow \quad x_{\mathrm{C}} = \sqrt{\frac{2\,H}{g}}\, v_{\mathrm{CM,B}}$$

Og aktuell tallverdi blir:

$$x_{\mathrm{C}} = \sqrt{\left(\frac{2 \cdot 28.0\,\mathrm{m}}{9.80\,\mathrm{m/s^2}} \right)} \cdot (15.3\,\mathrm{m/s}) = 36.5\,\mathrm{m}$$

Dersom en regner avstanden fra toppen av skrenten til landingspunktet, blir svaret

$$D = \sqrt{x_{\mathrm{C}}^2 + H^2} = 46.0\,\mathrm{m}\ .$$

Presentasjon av sluttsvaret som x_{C} eller D er likeverdig.

OPPGAVE 3.

(a) Uelastisk støt. Kaller sluttfarten for v_f. Bevaring av bevegelsesmengde gir:

$$\begin{aligned} m\, v_i + M \cdot (0\,\mathrm{m/s}) &= (m + M)\, v_f \\ v_f &= \frac{m}{m + M}\, v_i \end{aligned}$$

Med det aktuelle tallmaterialet:

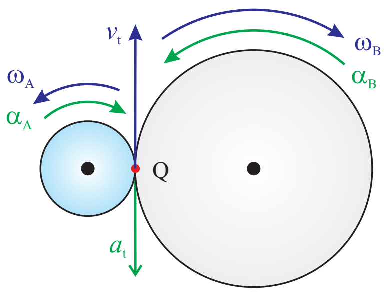
$$v_f = \frac{60.0 \times 10^{-3}\,\mathrm{kg}}{(60.0 + 240) \times 10^{-3}\,\mathrm{kg}} \cdot (22.0\,\mathrm{m/s}) = 0.200 \cdot (22.0\,\mathrm{m/s}) = 4.40\,\mathrm{m/s}$$

(b) Vi har bevaring av mekanisk energi, $E_{\text{mek}} = K + U_s$, der U_s er potensiell energi lagret i fjæren: Det følger at

$$
\begin{aligned}
(K_f - K_i) + (U_{sf} - 0) &= 0 \;\Downarrow \\
U_{sf} &= K_i - K_f \;\Downarrow \\
\frac{U_{sf}}{K_i} &= 1 - \frac{K_f}{K_i} \;\Downarrow \\
\frac{U_{sf}}{K_i} &= 1 - \frac{\frac{1}{2}\,(M+m)\,v_f^2}{\frac{1}{2}\,m\,v_i^2} \;\Downarrow \\
&= 1 - \frac{\frac{1}{2}\,(M+m)\cdot\dfrac{m^2}{(M+m)^2}\,v_i^2}{\frac{1}{2}\,m\,v_i^2} \;\Downarrow \\
&= 1 - \frac{m}{M+m} \;\Downarrow \\
&= 1 - 0.200 = 0.800
\end{aligned}
$$

OPPGAVE 4.

(a) Kontaktpunktet, Q, mellom de to platene har samme tangensielle hastighet, v_{t}, og samme tangensielle akselerasjon, a_{t}.



Med positive retninger som vist i figuren ovenfor, har vi for de aktuelle størrelsene:

$$
\begin{aligned}
\omega_{\text{A}}\, r_{\text{A}} &= \omega_{\text{B}}\, r_{\text{B}} \\
\alpha_{\text{A}}\, r_{\text{A}} &= \alpha_{\text{B}}\, r_{\text{B}}
\end{aligned}
$$

Slik at

$$
\begin{aligned}
\omega_{\text{B}} &= \omega_{\text{A}}\,\frac{r_{\text{A}}}{r_{\text{B}}} \quad (\,\textit{med klokken}\,) \\
\alpha_{\text{B}} &= \alpha_{\text{A}}\,\frac{r_{\text{A}}}{r_{\text{B}}} \quad (\,\textit{mot klokken}\,)
\end{aligned}
$$

Aktuelle tallverdier:

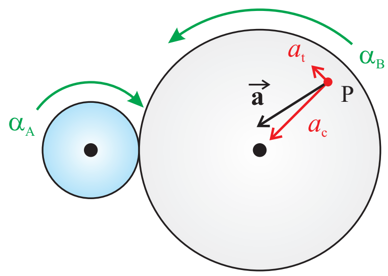
$$\omega_{\mathrm{B}} = (3.00\,\mathrm{rad/s})\,\frac{1.00\,\mathrm{m}}{2.50\,\mathrm{m}} = 1.20\,\mathrm{rad/s} \quad (\,\textit{med klokken}\,)$$

$$\alpha_{\mathrm{B}} = (1.00\,\mathrm{rad/s^2})\,\frac{1.00\,\mathrm{m}}{2.50\,\mathrm{m}} = 0.400\,\mathrm{rad/s^2} \quad (\,\textit{mot klokken}\,)$$

(b) Punktet P har tangensiell hastighet, v_{t}, gitt ved:

$$v_t = \omega_{\mathrm{B}}\, r_{\mathrm{P}} = (1.20\,\mathrm{rad/s}) \cdot (2.00\,\mathrm{m}) = 2.40\,\mathrm{m/s}$$

Akselerasjonen er sammensatt av en tangensiell komponent, a_{t}, og en en normalkomponent, sentripetalakselerasjonen a_{c}, som er rettet inn mot sirkelsentrum.



- Tangensiell akselerasjon:

$$a_{\mathrm{t}} = \alpha_{\mathrm{B}}\, r_{\mathrm{P}} = (0.400\,\mathrm{rad/s^2}) \cdot (2.00\,\mathrm{m}) = 0.800\,\mathrm{m/s^2}$$

- Sentripetal akselerasjon:

$$a_{\mathrm{c}} = \omega_{\mathrm{B}}^2\, r_{\mathrm{P}} = (1.20\,\mathrm{rad/s})^2 \cdot (2.00\,\mathrm{m}) = 2.88\,\mathrm{m/s^2}$$

- Størrelsen av akselerasjonen i punktet P:

$$a = \sqrt{a_{\mathrm{t}}^2 + a_{\mathrm{c}}^2} = \sqrt{(0.800\,\mathrm{m/s^2})^2 + (2.88\,\mathrm{m/s^2})^2} = 2.99\,\mathrm{m/s^2}$$

- Retning på $\vec{\mathbf{a}}$ som vist i figuren ovenfor.

OPPGAVE 5.

(a) Treghetsmomentet om massesenteret, I_{CM}, for et rotorblad er gitt ved:

$$\begin{aligned} I_{\text{CM}} &= \int x^2\,\mathrm{d}m \\ &= \frac{M}{L}\int_{-L/2}^{L/2} x^2\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{M}{L}\left[\frac{1}{3}x^3\Big|_{-L/2}^{L/2}\right] \\ &= \frac{1}{3}\frac{M}{L}\left[\frac{L^3}{8}-\left(-\frac{L^3}{8}\right)\right] \\ &= \frac{1}{12}M\,L^2 \end{aligned}$$

(b) Nytter Steiners sats til å forskyve rotasjonsaksen fra CM til rotorbladet til helikopter-rotorens omdreiningsakse:

$$\begin{aligned} I &= I_{\text{CM}} + M\left(\frac{L}{2}\right)^2 \\ &= \frac{1}{12}M\,L^2 + \frac{1}{4}M\,L^2 \\ &= \frac{1}{3}M\,L^2 \end{aligned}$$

Samlet bidrag fra alle tre rotorbladene gir oss da det søkte treghetsmomentet om rotorens massesenter, her gitt symbolet $I_{\text{CM,R}}$:

$$I_{\text{CM,R}} = 3\,I = \;M\,L^2$$

Aktuell tallverdi blir:

$$I_{\text{CM,R}} = 3\,I = \;(135\,\text{kg})\cdot(3.75\,\text{m})^2 = 1.90\times10^3\,\text{kgm}^2$$

(c) Nytter arbeid-kinetisk energiteoremet for rotasjonsbevegelse, med et konstant ytre kraftmoment, τ. Initiell rotasjonshastighet er $\omega_i = 0\,\text{rad/s}$. Aktuelt treghetsmoment er $I_{\text{CM,R}}$:

$$\begin{aligned} \Delta K &= W \;\Downarrow \\ \frac{1}{2}\,I_{\text{CM,R}}\,\omega_f^2 &= \int_{\theta_i}^{\theta_f}\tau\,\mathrm{d}\theta = \tau\,(\theta_f-\theta_i) \end{aligned}$$

Nytter videre bevegelsesligningen for rotasjonsbevegelse ved konstant vinkelakselerasjon ($\Delta t = (t_f - t_i)$ gitt som t i formelarket):

$$\theta_f - \theta_i = \frac{1}{2}(\omega_i + \omega_f)\,\Delta t \to \frac{1}{2}\,\omega_f\,\Delta t$$

Vi har følgelig

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\,I_{\mathrm{CM,R}}\,\omega_f^2 &= \tau \cdot \frac{1}{2}\,\omega_f\,\Delta t \;\Downarrow \\
\tau &= \frac{I_{\mathrm{CM,R}}\,\omega_f}{\Delta t}
\end{aligned}$$

Aktuell tallverdi blir:

$$\begin{aligned}
\tau &= \frac{(1.90 \times 10^3\,\mathrm{kgm^2}) \cdot [(5.00 \cdot 2\pi)\,\mathrm{rad/s}]}{8.00\,\mathrm{s}} \\
&= \frac{1.90 \cdot \pi}{8} \times 10^4\,(\mathrm{kgm/s^2})\,\mathrm{m} = 7.46 \times 10^3\,\mathrm{Nm}
\end{aligned}$$

(d) Fra spinnsatsen,

$$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t} = \tau\ ,$$

følger det, siden kraftmomentet er konstant, at spinnet L vil endre seg med tiden som:

$$L = \tau\,t$$

Etter 1.00 s vil spinnet ha verdien

$$L = (7.46 \times 10^3\,\mathrm{Nm}) \cdot (1.00\,\mathrm{s}) = 7.46 \times 10^3\,\mathrm{kgm^2s^{-1}}\ .$$