BIT 100 Fysikk

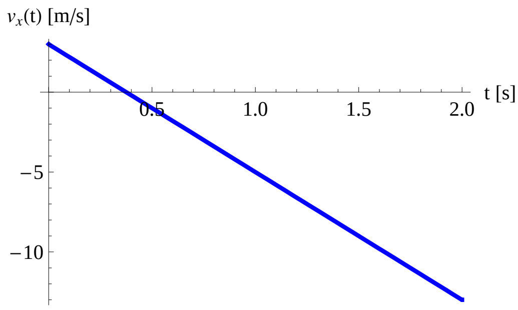
Eksamen 05.12.11 - Løsningsforslag.

OPPGAVE 1.

(a) Det følger at partikkelens momentane hastighet:

$$v_x = v_x(t) = \frac{dx}{dt} = (3.00\,\mathrm{m/s}) - (8.00\,\mathrm{m/s^2})\,t$$

Se illustrasjon i figur 1.



Figur 1: Plott av partikkelens hastighet v_x som funksjon av t.

Bevegelsesretningen snur når v_x skifter fortegn, altså når $v_x = 0.00\,\mathrm{m/s}$. Vi har:

$$\begin{aligned} v_x &= (3.00\,\mathrm{m/s}) - (8.00\,\mathrm{m/s^2})\,t = 0.00\,\mathrm{m/s} \;\Downarrow \\ t &= \frac{3.00\,\mathrm{m/s}}{8.00\,\mathrm{m/s^2}} = 0.375\,\mathrm{s} \end{aligned}$$

Aktuell posisjon er da:

$$x = \left[(2.00\,\mathrm{m}) + (3.00\,\mathrm{m/s})\cdot(0.375\,\mathrm{s}) - (4.00\,\mathrm{m/s^2})\cdot(0.375\,\mathrm{s})^2\right] = 2.56\,\mathrm{m}$$

(b) Benytter impuls-bevegelsesmengde teoremet til å bestemme ballens hastighet umiddelbart etter støtet med gulvet:

$$\Delta p_y = I_y$$

y-aksen er rettet positiv oppover.

$$m\,v_{yf} - m\,v_{yi} = I_y = \int_{5\,\mathrm{ms}}^{10\,\mathrm{ms}} F_y(t)\,\mathrm{d}t$$

Impulsen svarer til arealet under $F_y(t)$-grafen:

$$I_y = \frac{1}{2}\cdot(800\,\mathrm{N})\cdot(5.00\times10^{-3}\,\mathrm{s}) = 2.00\,\mathrm{Ns}$$

Nå blir:

$$\begin{aligned} v_{yf} &= v_{yi} + \frac{I_y}{m} \\ &= -(11.0\,\mathrm{m/s}) + \frac{2.00\,\mathrm{kgm/s}}{0.100\,\mathrm{kg}} \\ &= 9.00\,\mathrm{m/s} \end{aligned}$$

Vi kan så bestemme ballens maksimale høyde over bakken, kalt y_{max}, ved å benytte energibevaring i tyngdefeltet:

$$\begin{aligned} \Delta K + \Delta U_g &= 0 \;\Downarrow \\ \left(0 - \frac{1}{2}\,m\,v_{yf}^2\right) + (m\,g\,y_{\mathrm{max}} - 0) &= 0 \\ y_{\mathrm{max}} &= \frac{v_{yf}^2}{2\,g} \end{aligned}$$

Med de aktuelle tallverdiene:

$$y_{\mathrm{max}} = \frac{(9.00\,\mathrm{m/s})^2}{2\,(9.80\,\mathrm{m/s^2})} = 4.13\,\mathrm{m}$$

OPPGAVE 2.

(a) Skalarproduktet $\vec{\mathbf{A}} \cdot \vec{\mathbf{B}}$ kan uttrykkes som:

$$\vec{\mathbf{A}} \cdot \vec{\mathbf{B}} = |\vec{\mathbf{A}}|\,|\vec{\mathbf{B}}|\,\cos\theta$$

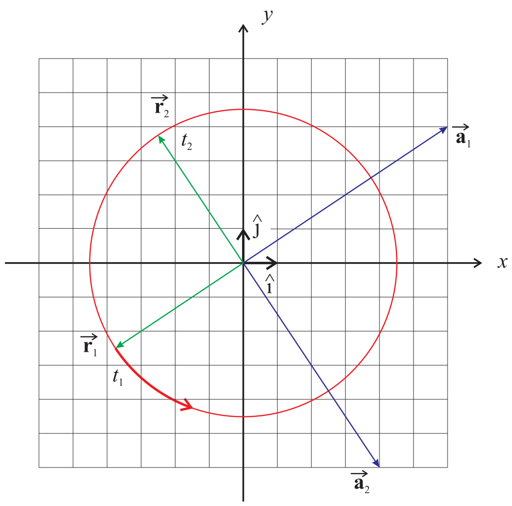
θ er vinkelen mellom vektorene. Det følger at dersom skalarproduktet er null, vil vinkelen mellom vektorene være 90° ($\cos 90° = 0$): Vektorene står vinkelrett på hverandre. Nytter at vi også kan uttrykke vektorproduktet ved skalarkomponentene:

$$\vec{\mathbf{A}} \cdot \vec{\mathbf{B}} = A_x\,B_x + A_y\,B_y$$

for to vilkårlige vektorer $\vec{\mathbf{A}}$ og $\vec{\mathbf{B}}$ i xy-planet.
Vi finner:

$$\vec{\mathbf{a}}_1 \cdot \vec{\mathbf{a}}_2 = (6.00\,\mathrm{m/s^2})\cdot(4.00\,\mathrm{m/s^2}) + (4.00\,\mathrm{m/s^2})\cdot(-6.00\,\mathrm{m/s^2}) = 0\,\mathrm{m^2/s^4}$$

Ved bevegelse i en sirkelbane med konstant banefart er retningen til akselerasjonsvektoren hele tiden *motsatt* rettet av posisjonsvektoren ($\vec{\mathbf{a}}$ peker inn mot sirkelsentrum). Se figur 2.



Figur 2: Bevegelse på en sirkelbane.

(b) Sentripetalakselerasjonens størrelse, a_c, er gitt ved:

$$a_c = |\vec{\mathbf{a}}_1| = |\vec{\mathbf{a}}_2| = \sqrt{(6.00\,\mathrm{m/s^2})^2 + (4.00\,\mathrm{m/s^2})^2} = 7.21\,\mathrm{m/s^2}$$

Videre vil banefart, v, og baneradius, r, måtte tilfredsstille:

$$\begin{aligned} v\,\Delta t &= \frac{3}{4}\cdot(2\,\pi\,r) \\ \frac{v^2}{r} &= a_c \end{aligned}$$

Det følger at:

$$\begin{aligned} r &= \left(\frac{2}{3\,\pi}\right)^2 a_c\,(\Delta t)^2 \\ v &= \left(\frac{2}{3\,\pi}\right) a_c\,\Delta t \end{aligned}$$

Med de aktuelle tallverdiene:

$$\begin{aligned} r &= \frac{4}{9\,\pi^2}\cdot(7.21\,\mathrm{m/s^2})\cdot(3.00\,\mathrm{s})^2 = 2.92\,\mathrm{m} \\ v &= \frac{2}{3\,\pi}\cdot(7.21\,\mathrm{m/s^2})\cdot(3.00\,\mathrm{s}) = 4.59\,\mathrm{m/s} \end{aligned}$$

Alternativt:

Siden sirkelbevegelsen skjer med konstant banefart vil omløpstiden, T, være:

$$T = \frac{(t_2 - t_1)}{\frac{3}{4}} = (5.00\,\mathrm{s} - 2.00\,\mathrm{s})\cdot\frac{4}{3} = 4.00\,\mathrm{s}$$

Vinkelhastigheten, ω, er da:

$$\omega = \frac{2\,\pi}{T} = \pi\cdot(0.500\,\mathrm{s^{-1}})$$

Følgende relasjoner kan hentes fra formelarket:

$$\begin{aligned} a_c &= r\,\omega^2 \\ v &= r\omega \end{aligned}$$

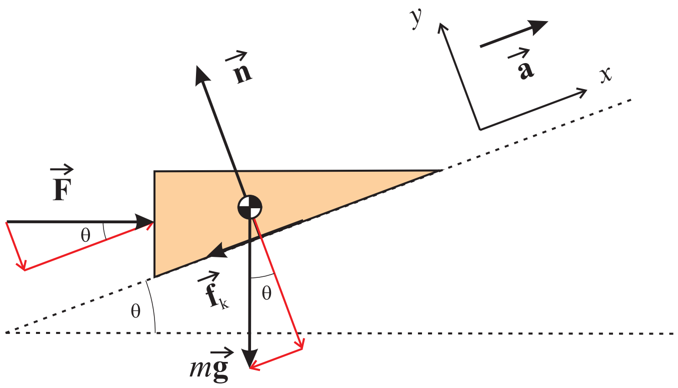
Vi finner:

$$r = \frac{a_c}{\omega^2} = \frac{1}{\pi^2}\cdot(4.00\,\mathrm{s^2})\cdot(7.21\,\mathrm{m/s^2}) = 2.92\,\mathrm{m}$$

$$v = \pi\cdot(0.500\,\mathrm{s^{-1}})\cdot(2.92\,\mathrm{m}) = 4.59\,\mathrm{m/s}$$

OPPGAVE 3.

(a) Frilegemediagram:



(b) Setter opp Newtons 2. lov for x- og y-retningen:

- x-retning:
$$F\,\cos\theta - m\,g\,\sin\theta - f_k = m\,a$$
- y-retning:
$$n - F\,\sin\theta - m\,g\,\cos\theta = 0$$

Størrelsen av den aktuelle friksjonskraften er gitt ved:

$$f_k = \mu_k\,n$$

Det følger at:

$$F\,\cos\theta - m\,g\,\sin\theta - \mu_k\,(F\,\sin\theta + m\,g\,\cos\theta) = m\,a$$

Og vi uttrykker kilens akselerasjon ved:

$$a = \frac{F}{m}\,(\cos\theta - \mu_k\,\sin\theta) - g\,(\sin\theta + \mu_k\,\cos\theta)$$

Med det aktuelle tallmaterialet:

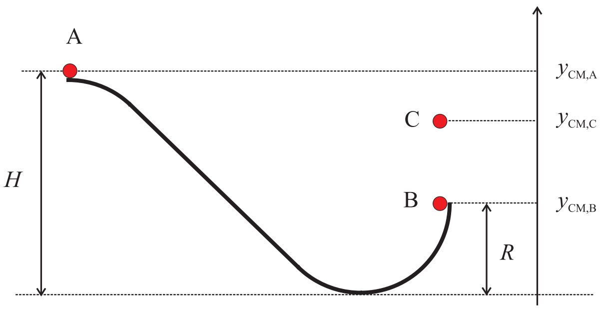
$$\begin{aligned} a \quad &= \quad \frac{310\,\mathrm{N}}{37.7\,\mathrm{kg}} \cdot [\,\cos(20.5^\circ) - 0.171 \cdot \sin(20.5^\circ)\,] \\ &\quad -(9.80\,\mathrm{m/s^2}) \cdot [\,\sin(20.5^\circ) + 0.171 \cdot \cos(20.5^\circ)\,] \\ &= \quad (7.21\,\mathrm{m/s^2}) - (5.00\,\mathrm{m/s^2}) = 2.21\,\mathrm{m/s^2} \end{aligned}$$

OPPGAVE 4.

(a) For en kule som utfører en ren rullebevegelse vil dens samlede kinetiske energi være gitt ved:

$$K = \frac{1}{2}\, m\, v_{\mathrm{CM}}^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}\, m\, r^2\right)\left(\frac{v_{\mathrm{CM}}}{r}\right)^2 = \frac{7}{10}\, m\, v_{\mathrm{CM}}^2$$

Tilskriver symbolet A til kulens startposisjon, B til punktet der kulen forlater banen og C til kulens posisjon i maks høyde over bakken:



Vi har bevaring av mekanisk energi, $K + U_g$, under rullebevegelsen på banen:

$$\begin{aligned}
\Delta K + \Delta U_g &= 0 \Downarrow \\
(K_{\mathrm{B}} - 0) + m\, g\, (y_{\mathrm{CM,B}} - y_{\mathrm{CM,A}}) &= 0 \Downarrow \\
\frac{7}{10}\, m\, v_{\mathrm{CM,B}}^2 &= m\, g\, (H - R) \Downarrow \\
v_{\mathrm{CM,B}}^2 &= \frac{10}{7}\, g\, (H - R)
\end{aligned}$$

Etter at kulen har forlatt banen, vil den eneste eksterne kraften som bestemmer massesenterakselerasjonen, være tyngdekraften.
For massesenterbevegelsen kan vi følgelig nytte bevegelsesligning (3) for rettlinjet bevegelse med konstant akselerasjon:

$$0 = v_{\mathrm{CM,B}}^2 - 2\, g\, (y_{\mathrm{CM,C}} - y_{\mathrm{CM,B}})$$

Siden massesenterfarten er null i topp-punktet C. Det følger at:

$$\begin{aligned} y_{\mathrm{CM,C}} &= y_{\mathrm{CM,B}} + \frac{v_{\mathrm{CM,B}}^2}{2\,g} \\ &= R + \frac{5}{7}\,(H - R) \\ &= \frac{1}{7}\,(5\,H + 2\,R) \end{aligned}$$

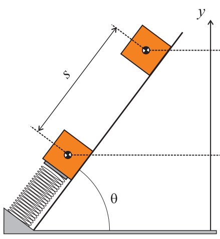
Aktuell tallverdi:

$$y_{\mathrm{CM,C}} = \frac{1}{7} \cdot [\,5 \cdot (6.00\,\mathrm{m}) + 2 \cdot (2.50\,\mathrm{m})\,] = 5.00\,\mathrm{m}$$

(b) Under bevegelsen langs skråplanet vil mekanisk energi bli redusert på grunn av arbeidet utført av friksjonskraften.

$$\Delta K + \Delta U_s + \Delta U_g = -f_k\, s$$

Der s er pakkens forskyvning langs skråplanet.



Videre er $\Delta K = 0\,\mathrm{J}$, siden pakken i begynnelse- og slutt-posisjon har fart lik $0\,\mathrm{m/s}$. Størrelsen av normalkraften, n, som pakken erfarer på skråplanet, er $n = m\,g\,cos\theta$. Tilskriver symbolet Δx til fjærens lengdeendring (kompresjon) initielt. Det følger at:

$$-\frac{1}{2}\,k\,\Delta x^2 + m\,g\,s\,\sin\theta = -\mu_k\,m\,g\,\cos\theta\,s$$

Som gir at:

$$\begin{aligned} m\,g\,(\sin\theta + \mu_k\,\cos\theta)\,s &= \frac{1}{2}\,k\,\Delta x^2 \;\Downarrow \\ s &= \frac{k\,\Delta x^2}{2\,m\,g\,(\sin\theta + \mu_k\,\cos\theta)} \end{aligned}$$

Med de aktuelle tallverdier:

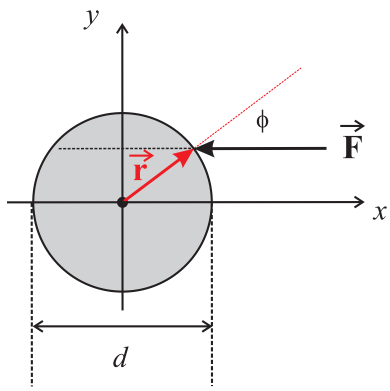
$$s = \frac{(2.40 \times 10^3\,\mathrm{Nm^{-1}}) \cdot (0.150\,\mathrm{m})^2}{2 \cdot (2.00\,\mathrm{kg}) \cdot (9.80\,\mathrm{m/s^2}) \cdot [\,\sin(53.1^\circ) + (0.200)\,\cos(53.1^\circ)\,]} = 1.50\,\mathrm{m}$$

OPPGAVE 5.

Aktuelt kraftmoment, $\vec{\boldsymbol{\tau}}^{(\mathrm{F})}$, knyttet til kraften $\vec{\mathbf{F}}$, er gitt ved:

$$\begin{aligned}
\vec{\boldsymbol{\tau}}^{(\mathrm{F})} &= \vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{F}} \\
&= \frac{d}{2}(\cos\phi\,\hat{\imath} + \sin\phi\,\hat{\jmath}) \times (-F\,\hat{\imath}) \\
&= \frac{\sin\phi}{2}\,d\,F\,\hat{k}
\end{aligned}$$

Her er d skivens diameter, F kraftens størrelse og $\phi = 36.9°$.



I de innledende 2.00 s er $F = F_1 = 70.0\,\mathrm{N}$ siden er $F = F_2 = 28.0\,\mathrm{N}$.

(a) Når størrelsen på den ytre kraften er F_2, roterer skiven med konstant vinkelhastighet. Følgelig er vinkelakselrasjonen da null og i følge momentsatsen er også netto ytre kraftmoment null. Friksjonskraftens moment kalles $\tau_z^{(f)}$. Det følger at:

$$\begin{aligned}
\tau_z^{(f)} + \frac{\sin\phi}{2}\,d\,F_2 &= 0 \ \Downarrow \\
\tau_z^{(f)} &= -\frac{\sin\phi}{2}\,d\,F_2
\end{aligned}$$

Aktuell størrelse blir da:

$$|\tau_z^{(f)}| = \frac{\sin(36.9°)}{2} \cdot (0.300\,\mathrm{m}) \cdot (28.0\,\mathrm{N}) = 2.52\,\mathrm{Nm}$$

(b) Benytter momentsatsen til å bestemme aktuell vinkelakselrasjon, α:

$$I_z\,\alpha = \tau_z$$

Netto kraftmoment under de første 2.00 s er:

$$\tau_z = \frac{\sin\phi}{2}\,d\,(F_1 - F_2)$$

Videre er aktuelt treghetsmoment:

$$I_z = \frac{1}{2}\,M\,\left(\frac{d}{2}\right)^2 = \frac{1}{8}\,M\,d^2$$

M er skivens masse. Vi finner for α:

$$\alpha = 4\,\sin\phi\,\frac{(F_1 - F_2)}{M\,d}$$

Aktuell tallverdi:

$$\alpha = 4\cdot\sin(36.9^\circ)\frac{(42.0\,\mathrm{N})}{(14.0\,\mathrm{kg})\cdot(0.300\,\mathrm{m})} = 24.0\,\mathrm{s}^{-2}$$

Det følger at den søkte vinkelhastigheten, ω_f, blir:

$$\omega_f = \alpha\,\Delta t = (24.0\,\mathrm{s}^{-2})\cdot(2.00\,\mathrm{s}) = 48.0\,\mathrm{s}^{-1}$$

OPPGAVE 6.

(a) Den gitte situasjonen er beskrevet ved bevaring av systemets bevegelsesmengde:

$$m_{\mathrm{A}}\, v_{\mathrm{A}x} + m_{\mathrm{B}}\, v_{\mathrm{B}x} = 0$$

Og bevaring av dets mekaniske energi:

$$\frac{1}{2}\, m_{\mathrm{A}}\, v_{\mathrm{A}x}^2 + \frac{1}{2}\, m_{\mathrm{B}}\, v_{\mathrm{B}x}^2 = \frac{1}{2}\, k\, \Delta x^2$$

Det følger at vi kan uttrykke:

$$v_{\mathrm{A}x} = -\frac{m_{\mathrm{B}}}{m_{\mathrm{A}}}\, v_{\mathrm{B}x}$$

slik at:

$$\begin{aligned} m_{\mathrm{A}} \left(-\frac{m_{\mathrm{B}}}{m_{\mathrm{A}}}\, v_{\mathrm{B}x}\right)^2 + m_{\mathrm{B}}\, v_{\mathrm{B}x}^2 &= k\, \Delta x^2 \ \Downarrow \\ m_{\mathrm{B}} \left(1 + \frac{m_{\mathrm{B}}}{m_{\mathrm{A}}}\right) v_{\mathrm{B}x}^2 &= k\, \Delta x^2 \end{aligned}$$

Og vi finner for farten til blokk B:

$$|v_{\mathrm{B}x}| = \Delta x \sqrt{\frac{k}{m_{\mathrm{B}} \left(1 + \dfrac{m_{\mathrm{B}}}{m_{\mathrm{A}}}\right)}}$$

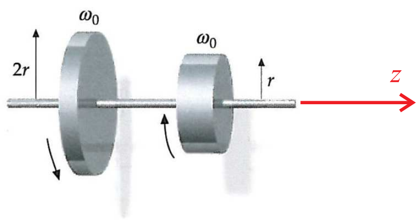
Og for blokk A:

$$|v_{\mathrm{A}x}| = \frac{m_{\mathrm{B}}}{m_{\mathrm{A}}}\, |v_{\mathrm{B}x}|$$

Aktuelle tallverdier:

$$\begin{aligned} |v_{\mathrm{B}x}| &= (3.00 \times 10^{-2}\,\mathrm{m}) \cdot \sqrt{\frac{(2.13 \times 10^3\,\mathrm{Nm}^{-1})}{(3.00\,\mathrm{kg}) \cdot \left[1 + \dfrac{(3.00\,\mathrm{kg})}{(1.00\,\mathrm{kg})}\right]}} = 0.400\,\mathrm{m/s} \\ |v_{\mathrm{A}x}| &= \frac{(3.00\,\mathrm{kg})}{(1.00\,\mathrm{kg})} \cdot (0.400\,\mathrm{m/s}) = 1.20\,\mathrm{m/s} \end{aligned}$$

(b) Den gitte situasjonen er beskrevet ved bevaring av systemets spinn (z-komponenten):



$$L_{zi} = \frac{1}{2}\, M\,(2\,r)^2\,\omega_0 - \frac{1}{2}\, M\, r^2\,\omega_0 = \frac{3}{2}\, M\, r^2\,\omega_0$$

Samlet treghetsmoment etter sammenføyning:

$$I_z = \frac{1}{2}\, M\,(2\,r)^2 + \frac{1}{2}\, M\, r^2 = \frac{5}{2}\, M\, r^2$$

Tilskriver rotasjonshastigheten etter sammenføyning symbolet ω_f. Samlet spinn, L_{zf}, er nå:

$$L_{zf} = I_z\,\omega_f = \frac{5}{2}\, M\, r^2\,\omega_f$$

Spinnbevaring:

$$L_{zf} = L_{zi}$$

gir oss:

$$\begin{aligned} \frac{5}{2}\, M\, r^2\,\omega_f &= \frac{3}{2}\, M\, r^2\,\omega_0 \ \Downarrow \\ \omega_f &= \frac{3}{5}\,\omega_0 \end{aligned}$$