BIT 100 Fysikk

Eksamen 05.05.09 - Løsningsforslag.

OPPGAVE 1.

(a) Nytter bevegelsesligningene:

$$\begin{aligned} x_f &= (v_i \cos\theta_i)\, t \\ y_f &= (v_i \sin\theta_i)\, t - \frac{1}{2} g\, t^2 \end{aligned}$$

Eliminerer tiden t mellom disse ligningene og finner

$$y_f = x_f \tan\theta_i - \frac{1}{2}\, g \left(\frac{x_f}{v_i \cos\theta_i}\right)^2 .$$

Anvender dette for nedslagspunktet, $(x_f, y_f) = (R, 0)$, og finner

$$0 = R \tan\theta_i - \frac{1}{2}\, g\, \frac{R^2}{v_i^2 \cos^2\theta_i}$$

eller omformet:

$$R = \frac{2\, v_i^2 \sin\theta_i \cos\theta_i}{g} = \frac{v_i^2 \sin 2\theta_i}{g}$$

Innsatt de aktuelle tallverdiene gir:

$$\begin{aligned} v_i &= \sqrt{\frac{R\, g}{\sin 2\theta_i}} \\ &= \sqrt{\frac{(219\,\mathrm{m}) \cdot (9.80\,\mathrm{m/s^2})}{\sin 26.0^\circ}} \\ &= 70.0\,\mathrm{m/s} \end{aligned}$$

(b) Impuls-bevegelsesmengde teoremet sier at

$$\overrightarrow{\mathbf{I}} = \Delta\,\overrightarrow{\mathbf{p}} = m\,\Delta\,\overrightarrow{\mathbf{v}}$$

Vi anvender teoremet for aktuell bevegelsesretning, $\overrightarrow{\mathbf{v}}_i/|\overrightarrow{\mathbf{v}}_i|$, og kan dermed sløyfe vektornotasjonen. (En-dimensjonal analyse):

$$I = m\,\Delta v = m\,(v_i - 0) = m\, v_i$$

Slik at

$$I = (45.0 \times 10^{-3}\,\mathrm{kg}) \cdot (70.0\,\mathrm{m/s}) = 3.15\,\mathrm{kg\,m/s}$$

(c) Siden kraften som golfballen erfarer antas å være konstant, kan vi nytte bevegelsesligningen for én-dimensjonal bevegelse med konstant akselerasjon. Vi finner

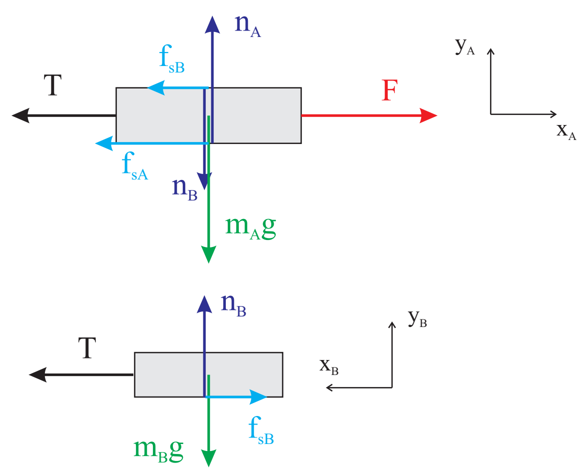
$$r = \frac{1}{2}(0 + v_i)\,\Delta t \;\Rightarrow\; \Delta t = \frac{2\,r}{v_i} = \frac{2 \cdot (2.00 \times 10^{-2}\,\mathrm{m})}{70.0\,\mathrm{m/s}} = 5.71 \times 10^{-4}\,\mathrm{s}$$

(d) Fra definisjonsligningen for impuls finner vi at kraften, F, på golfballen under utslaget har vært:

$$F\,\Delta t = I \;\Rightarrow\; F = \frac{I}{\Delta t} = \frac{3.15\,\mathrm{kg\,m/s}}{5.71 \times 10^{-4}\,\mathrm{s}} = 5.51 \times 10^{3}\,\mathrm{N}$$

OPPGAVE 2.

(a)



Figur 1: Fri legeme diagram for kloss A og B. Merk at vi har anvendt Newtons 3. lov og angitt kraft og motkraft med samme symbol (n_{B} og $f_{s\,\mathrm{B}}$). Aktuell horisontal bevegelsesretning for de to klossene er motsatt rettet.

Aktuelle bevegelsesligninger kloss A (klossen forblir i ro):

$$\begin{aligned} n_{\mathrm{A}} - n_{\mathrm{B}} - m_{\mathrm{A}}\,g &= 0 \\ F - f_{s\,\mathrm{A}} - f_{s\,\mathrm{B}} - T &= 0 \\ f_{s\,\mathrm{A}} &= \mu\,n_{\mathrm{A}} \end{aligned}$$

μ må sees på som en justerbar parameter med verdi i intervallet $(0, \mu_s)$, idet statisk friksjon er *selvjusterende* inntil det punktet glipping inntreffer.
For kloss B (klossen forblir i ro):

$$\begin{aligned} n_{\mathrm{B}} - m_{\mathrm{B}}\, g &= 0 \\ T - f_{s\,\mathrm{B}} &= 0 \\ f_{s\,\mathrm{B}} &= \mu\, n_{\mathrm{B}} \end{aligned}$$

Generelt burde vi assosiert μ' med $f_{s\,\mathrm{B}}$, men vi har valgt å nytte μ som proporsjonalitetsfaktor både for $f_{s\,\mathrm{A}}$ og $f_{s\,\mathrm{B}}$. Den minste kraften F, som vi søker, må være assosiert med at statisk friksjon antar maksimal verdi, dvs.: $\mu = \mu' = \mu_s$. Det følger at

$$\begin{aligned} n_{\mathrm{A}} &= (m_{\mathrm{A}} + m_{\mathrm{B}})\, g \\ n_{\mathrm{B}} &= m_{\mathrm{B}}\, g \end{aligned}$$

Kombinert gir dette:

$$\begin{aligned} F - (m_{\mathrm{A}} + m_{\mathrm{B}})\, g\, \mu - m_{\mathrm{B}}\, g\, \mu - T &= 0 \\ T - m_{\mathrm{B}}\, g\, \mu &= 0 \end{aligned}$$

Adderer vi disse ligningene eliminerer vi snordraget og vi finner at

$$F - (m_{\mathrm{A}} + 3\, m_{\mathrm{B}})\, g\, \mu = 0$$

Når verdien til F økes fra null, kan ligningen oppfylles bare ved at μ øker proporsjonalt. Imidlertid kan μ ikke overskride μ_s, og følgelig vil vi få bevegelse i horisontal retning for de to klossene når

$$\begin{aligned} F &\geq (m_{\mathrm{A}} + 3\, m_{\mathrm{B}})\, g\, \mu_s \ \Downarrow \\ F &\geq [5.00\,\mathrm{kg} + 3 \cdot (3.00\,\mathrm{kg})\,] \cdot (9.80\,\mathrm{m/s^2}) \cdot 0.600 \ \Downarrow \\ F &\geq 82.3\,\mathrm{N} \end{aligned}$$

(b) Vi finner treghetsmomentet, $I_{\mathrm{O},y}$ for det sammensatte objektet ved å addere bidragene fra hvert *delobjekt*: Kule og stang. Vi trenger å anvende Steiners sats for å *forskyve* rotasjonsaksene fra å gå gjennom delobjektenes massesentre til å falle sammen med angitt y-akse.
Vi finner at

$$\begin{aligned} I_{\mathrm{K},y} &= m_{\mathrm{K}}\, x_{\mathrm{K,CM}}^2 + \frac{2}{5}\, m_{\mathrm{K}}\, R^2 \\ I_{\mathrm{S},y} &= m_{\mathrm{S}}\, x_{\mathrm{S,CM}}^2 + \frac{1}{12}\, m_{\mathrm{S}}\, l^2 \end{aligned}$$

Her er $x_{\mathrm{K,CM}}$ og $x_{\mathrm{S,CM}}$ x-koordinatene for massesentrene til de to delobjektene. Det følger fra figuren at

$$\begin{aligned} x_{\mathrm{K,CM}} &= l + R = 0.80\,\mathrm{m} \\ x_{\mathrm{S,CM}} &= \frac{l}{2} = 0.30\,\mathrm{m} \end{aligned}$$

Følgelig blir

$$\begin{aligned} I_{\mathrm{K},y} &= (2.0\,\mathrm{kg})\left[(0.80\,\mathrm{m})^2 + \frac{2}{5}\,(0.20\,\mathrm{m})^2\right] = 1.3\,\mathrm{kgm}^2 \\ I_{\mathrm{S},y} &= (3.0\,\mathrm{kg})\left[(0.30\,\mathrm{m})^2 + \frac{1}{12}\,(0.60\,\mathrm{m})^2\right] = 0.36\,\mathrm{kgm}^2 \end{aligned}$$

og samlet treghetsmoment (2 gjeldende siffer)

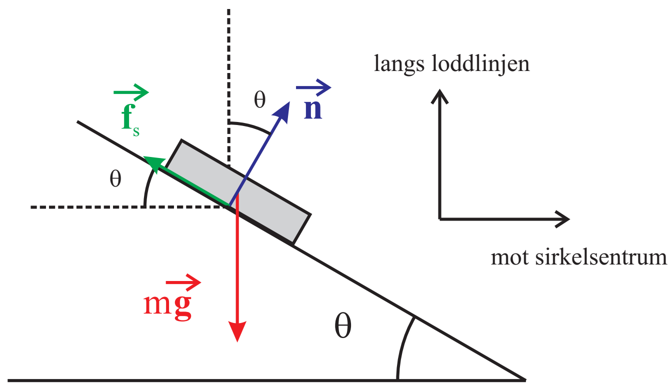
$$I_{\mathrm{O},y} = I_{\mathrm{K},y} + I_{\mathrm{S},y} = 1.7\,\mathrm{kgm}^2$$

OPPGAVE 3.

(a) Innsetting av tallverdier:

$$\begin{aligned} v_{\mathrm{max}} &= \sqrt{(60.0\,\mathrm{m})\cdot(9.80\,\mathrm{m/s}^2)\,\frac{\tan 15.0^\circ + 0.150}{1 - 0.150\;\tan 15.0^\circ}} \\ &= 16.0\,\mathrm{m/s}\;\Downarrow \\ &= (16.0\,\mathrm{m/s})\cdot\left(3.60\,\frac{\mathrm{km/time}}{\mathrm{m/s}}\right) = 57.6\,\mathrm{km/time} \end{aligned}$$

(b) Aktuelt frilegemediagram:



Anvendelse av Newtons 2. lov gir:

- I retning mot sirkelsentrum har vi sentripetalakselerasjon:

$$n\,\sin\theta - f_s\,\cos\theta = m\,\frac{v^2}{R}$$

- Langs loddlinjen er bilen i ro, dvs. akselerasjonen i denne retningen er null.

$$n\,\cos\theta + f_s\,\sin\theta - m\,g = 0$$

Dette svarer til de to oppgitte ligningene.

(c) Friksjonskraftens størrelse, f_s, er proporsjonal med normalkraften størrelse n. Vi skriver

$$f_s = \mu\,n \qquad \mu \in (0, \mu_s)$$

Vi har da at

$$\begin{aligned} n\,(\sin\theta - \mu\cos\theta) &= m\,\frac{v^2}{R} &\quad (1)\\ n\,(\cos\theta + \mu\sin\theta) &= m\,g &\quad (2) \end{aligned}$$

Deler ligningene på hverandre:

$$\frac{\text{lign. (1)}}{\text{lign. (2)}} = \frac{v^2}{R\,g} = \frac{\sin\theta - \mu\cos\theta}{\cos\theta + \mu\sin\theta} = \frac{\tan\theta - \mu}{1 + \mu\tan\theta}$$

Det følger at

$$v^2 = R\,g\,\frac{\tan\theta - \mu}{1+\mu\tan\theta}$$

Den minste farten, v_{min}, oppnås når friksjonskraften har sin maksimale verdi: $\mu = \mu_s$. Vi finner

$$\begin{aligned}
v_{\text{min}} &= \sqrt{R\,g\,\frac{\tan\theta - \mu_s}{1+\mu_s\,\tan\theta}} \\
&= \sqrt{(60.0\,\text{m})\cdot(9.80\,\text{m/s}^2)\,\frac{\tan 15.0^\circ - 0.150}{1+0.150\,\tan 15.0^\circ}} \\
&= 8.17\,\text{m/s} \;\Downarrow \\
&= (8.17\,\text{m/s})\cdot\left(3.60\,\frac{\text{km/time}}{\text{m/s}}\right) = 29.4\,\text{km/time}
\end{aligned}$$

(d) Aktuell fart $v = 36.0\,\text{km/time}$ tilsvarer $v = 10.0\,\text{m/s}$. Tar utgangspunkt i ligningene

$$\begin{aligned}
n\,\sin\theta - f_s\,\cos\theta &= m\,\frac{v^2}{R} \\
n\,\cos\theta + f_s\,\sin\theta &= m\,g
\end{aligned}$$

Multipliserer første ligning med $\sin\theta$ og den andre med $\cos\theta$ og adderer dem. Ved dette eliminerer vi f_s. Vi finner

$$n = m\left(\frac{v^2}{R}\,\sin\theta + g\,\cos\theta\right)$$

Likeledes, multipliserer vi første ligning med $(-\cos\theta)$ og den andre med $\sin\theta$ og adderer dem, elimineres n. Vi finner

$$f_s = m\left(g\,\sin\theta - \frac{v^2}{R}\,\cos\theta\right)$$

Aktuelle tallverdier:

$$\begin{aligned}
n &= (2.00\;\times 10^3\,\text{kg}\left[\frac{(10.0\,\text{m/s})^2}{(60.0\,\text{m})}\,\sin 15.0^\circ + (9.80\,\text{m/s}^2)\,\cos\;15.0^\circ\right] \\
&= 19.8\times 10^3\,\text{N}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_s &= (2.00\;\times 10^3\,\text{kg}\left[(9.80\,\text{m/s}^2)\,\sin\;15.0^\circ - \frac{(10.0\,\text{m/s})^2}{(60.0\,\text{m})}\,\cos 15.0^\circ\right] \\
&= 1.85\times 10^3\,\text{N}
\end{aligned}$$

OPPGAVE 4.

(a) Nytter bevaring av mekanisk energi:

$$\frac{1}{2}\,k\,\Delta x^2 = \frac{1}{2}\,m\,v^2 \;\;\Rightarrow\;\; k = \frac{m\,v^2}{\Delta x^2}$$

Og vi finner følgende tallverdi for fjærkonstanten

$$k = (0.500\,\mathrm{kg})\cdot\frac{(1.40\,\mathrm{m/s})^2}{(4.00\times 10^{-2}\,\mathrm{m})^2} = 6.13\times 10^2\,\mathrm{N/m}$$

(b) Ved ren rullebvegelse har vi følgende sammenheng:

$$\omega_{\mathrm{B}}\,R = v_{\mathrm{B}} \;\;\Leftrightarrow\;\; \omega_{\mathrm{B}} = \frac{v_{\mathrm{B}}}{R}$$

Samlet kinetisk energi er sammensatt av bidraget fra massesenterbevegelsen og bidraget fra rotasjonsbevegelsen:

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{2}\,m\,v_{\mathrm{B}}^2 + \frac{1}{2}\,I\,\omega_{\mathrm{B}}^2 \\ &= \frac{1}{2}\,m\,v_{\mathrm{B}}^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}\,m\,R^2\right)\left(\frac{v_{\mathrm{B}}}{R}\right)^2 \\ &= \frac{7}{10}\,m\,v_{\mathrm{B}}^2 \end{aligned}$$

Vi finner følgende tallverdi:

$$K = \frac{7}{10}\,m\left(\frac{5}{7}\,v_{\mathrm{A}}\right)^2 = \frac{7}{10}\,(0.500\,\mathrm{kg})\cdot(1.00\,\mathrm{m/s})^2 = 0.350\,\mathrm{J}$$

(c) Nytter først Newtons 2. lov for massesenterbevegelsen (f er den konstante friksjonskraften som er operativ så lenge kulen glir):

$$m\,a_{\mathrm{CM}} = -f = -\mu\,m\,g \;\;\Rightarrow\;\; a_{\mathrm{CM}} = -\mu\,g$$

Nytter deretter arbeid-kinetisk energi teoremet for massesenter bevegelsen:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\,m\,v_{\mathrm{B}}^2 - \frac{1}{2}\,m\,v_{\mathrm{A}}^2 &= -\mu\,m\,g\,s \;\Downarrow \\ \frac{1}{2}\,m\left[\left(\frac{5}{7}\right)^2 - 1\right]v_{\mathrm{A}}^2 &= -\mu\,m\,g\,s \;\Downarrow \\ \mu &= \frac{\left[1-\left(\frac{5}{7}\right)^2\right]v_{\mathrm{A}}^2}{2\,g\,s} \;\Downarrow \\ \mu &= \frac{12}{49}\,\frac{v_{\mathrm{A}}^2}{g\,s} \end{aligned}$$

Vi finner følgende tallverdi:

$$\mu = \frac{12}{49} \cdot \frac{(1.40\,\mathrm{m/s})^2}{(9.80\,\mathrm{m/s^2}) \cdot (0.326\,\mathrm{m})} = 0.150$$

(d) Vi nytter spinnsatsen for å bestemme vinkelakselerasjonen:

$$I\,\alpha = \tau = \mu\,m\,g\,R$$

Det følger at

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{\mu\,m\,g\,R}{\frac{2}{5}\,m\,R^2} = \frac{5}{2}\,\frac{\mu\,g}{R} \quad \Downarrow \\ &= \frac{5}{2} \cdot \frac{0.150 \cdot 9.80\,\mathrm{m/s^2}}{5.00 \times 10^{-2}\,\mathrm{m}} \\ &= 73.5\,\mathrm{s^{-2}} \end{aligned}$$

Fra bevegelsesligningen for rotasjon om en fast akse med konstant vinkelakselerasjon finner vi:

$$\begin{aligned} \Delta\theta &= \frac{\omega_f^2}{2\,\alpha} \quad \Downarrow \\ &= \frac{\left(\frac{v_\mathrm{B}}{R}\right)^2}{2\,\alpha} \quad \Downarrow \\ &= \frac{\left(\frac{5}{7}\,\frac{v}{R}\right)^2}{2\,\alpha} \quad \Downarrow \\ &= \frac{25}{98} \cdot \frac{v^2}{R^2\,\alpha} \quad \Downarrow \\ &= \frac{25}{98} \cdot \frac{(1.40\,\mathrm{m/s})^2}{(5.00 \times 10^{-2}\,\mathrm{m})^2 \cdot (73.5\,\mathrm{s^{-2}})} \\ &= 2.72\,\mathrm{rad} \end{aligned}$$