BIT 100 Fysikk

Eksamen 27.02.10 - Løsningsforslag.

OPPGAVE 1.

(a) Impulsen, I_x, er definert ved,

$$I_x = \int_{t_i}^{t_f} F_x(t)\,\mathrm{d}t \ ,$$

og svarer til arealet under den gitte kurven. $t_i = 0\,\mathrm{s}$ og $t_f = 5.0\,\mathrm{s}$.

$$\begin{aligned} I_x &= \frac{1}{2}\,(5.0\,\mathrm{s} + 1.0\,\mathrm{s}) \cdot (4.0\,\mathrm{N}) \\ &= 12.0\,\mathrm{Ns} = 12.0\,\mathrm{kgm/s} \end{aligned}$$

(b) Nytter impuls-bevegelsesmengde teoremet:

$$\begin{aligned} \Delta p_x &= I_x \ \Downarrow \\ m\,(v_{xf} - v_{xi}) &= I_x \ \Downarrow \\ v_{xf} &= v_{xi} + \frac{I_x}{m} \end{aligned}$$

Vi finner følgelig for den aktuelle situasjonen:

$$\begin{aligned} v_{xf} &= (-2.00\,\mathrm{m/s}) + \frac{12.0\,\mathrm{kgm/s}}{2.50\,\mathrm{kg}} \\ &= (-2.00\,\mathrm{m/s}) + (4.80\,\mathrm{m/s}) \\ &= 2.80\,\mathrm{m/s} \end{aligned}$$

OPPGAVE 2.

(a) Spinnet, $\vec{\mathbf{L}}_O$, om O er definert ved:

$$\vec{\mathbf{L}}_O = \vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{p}} = \vec{\mathbf{r}} \times (m\,\vec{\mathbf{v}}) = m\,(\vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{v}})$$

For den gitte situasjonen er:

$$\begin{aligned} \vec{\mathbf{r}} &= D\,\hat{\imath} + y\,\hat{\jmath} \qquad (y \leq 0) \\ \vec{\mathbf{v}} &= -g\,t\,\hat{\jmath} \qquad \text{(fritt fall)} \end{aligned}$$

Vi har følgelig at

$$\begin{aligned} \vec{\mathbf{L}}_O &= m\,(D\,\hat{\imath} + y\,\hat{\jmath}) \times (-g\,t\,\hat{\jmath}) \;\Downarrow \\ &= -m\,g\,D\,t\,\hat{k} \end{aligned}$$

(b) Kraftmomentet, $\vec{\boldsymbol{\tau}}_O$, om O er definert ved:

$$\vec{\boldsymbol{\tau}}_O = \vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{F}}$$

Eneste ytre kraft på massen m er tyngdekraften, $\vec{\mathbf{F}} = -m\,g\,\hat{\jmath}$, slik at

$$\begin{aligned} \vec{\boldsymbol{\tau}}_O &= (D\,\hat{\imath} + y\,\hat{\jmath}) \times (-m\,g\,\hat{\jmath}) \\ &= -m\,g\,D\,\hat{k} \end{aligned}$$

Dette resultatet kan en også utlede fra spinnsatsen:

$$\vec{\boldsymbol{\tau}}_O = \frac{\mathrm{d}\vec{\mathbf{L}}_O}{\mathrm{d}t} = -m\,g\,D\,\hat{k}$$

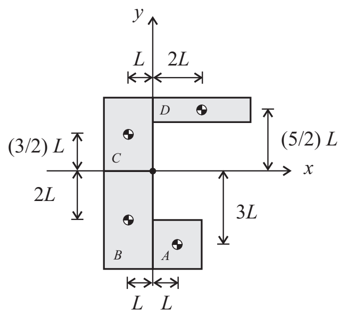
Her har en nyttet uttrykket for $\vec{\mathbf{L}}_O$ funnet under punkt (a).
I begge delspørsmålene har en brukt at: $\hat{\imath} \times \hat{\jmath} = \hat{k}$ og $\hat{\jmath} \times \hat{\jmath} = 0$.

OPPGAVE 3.

(a) Vi nytter følgende definisjon av massesenterets posisjon:

$$M\,\vec{\mathbf{r}}_{\text{CM}} = \sum_i m_i\,\vec{\mathbf{r}}_i$$

Vi deler platen i fire rektangler, A, B, C og D, som vist i figuren under:



Siden platen er uniform, vil massen til hvert rektangel, og platen som helhet, være direkte proporsjonal med de tilhørende arealer (a_i og $a = \sum_i a_i$). Vi kan følgelig skrive at

$$\vec{\mathbf{r}}_{\text{CM}} = \frac{1}{a}\sum_i a_i\,\vec{\mathbf{r}}_i$$

Massesenteret til de enkelte rektanglene faller sammen med deres geometriske midtpunkt. For rektanglene vil vi ha:

rektangel	areal	x_{CM}	y_{CM}
A	$4\,L^2$	L	$-3\,L$
B	$8\,L^2$	$-L$	$-2\,L$
C	$6\,L^2$	$-L$	$\frac{3}{2}\,L$
D	$4\,L^2$	$2\,L$	$\frac{5}{2}\,L$

Det følger at $a = 22\,L^2$, og vi finner for platen:

$$\begin{aligned}
x_{\text{CM}} &= \frac{1}{22}\left[\,4\,L + 8\,(-L) + 6\,(-L) + 4\,(2\,L)\,\right] = -\frac{2}{22}\,L \\
y_{\text{CM}} &= \frac{1}{22}\left[\,4\,(-3\,L) + 8\,(-2\,L) + 6\left(\frac{3}{2}\,L\right) + 4\left(\frac{5}{2}\,L\right)\right] = -\frac{9}{22}\,L
\end{aligned}$$

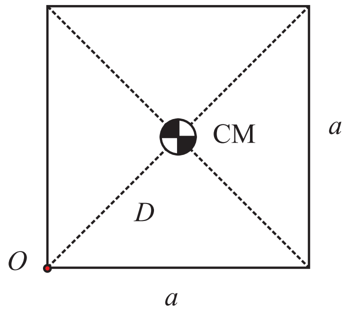
Eller uttrykt på vektorform:

$$\vec{\mathbf{r}}_{\text{CM}} = -\frac{L}{22}\,(2\,\hat{\imath} + 9\,\hat{\jmath})$$

(b) Utgangspunktet er Steiners setning:

$$I_{\mathrm{O}} = I_{\mathrm{CM}} + M\,D^2$$

Der D svarer til avstanden mellom massesenteret CM og aktuell posisjon av omdreiningsaksen O. Fra figuren ser vi at D tilsvarer halve flatediagonalen til platen.



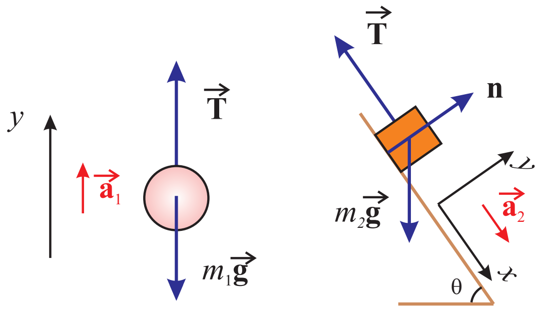
$$D = \frac{\sqrt{2}\,a}{2}$$

Vi finner

$$\begin{aligned} I_{\mathrm{O}} &= \frac{1}{6}\,M\,a^2 + M\left(\frac{\sqrt{2}\,a}{2}\right)^2 \\ &= \frac{1}{6}\,M\,a^2 + \frac{1}{2}\,M\,a^2 \\ &= \frac{2}{3}\,M\,a^2 \end{aligned}$$

OPPGAVE 4.

(a) Frilegemediagram for massene m_1 og m_2:



Siden snoren er ideell med konstant lengde under hele bevegelsen, vil

$$a_{1y} = a_{2x} = a$$

Det vil si akselerasjonen av massen m_1 vertikalt, a_{1y}, er lik akselerasjonen av massen m_2 langs skråplanet, a_{2x}. Vi nytter det felles symbolet, a, i den videre beskrivelsen. Anvendelse av Newtons 2. lov

- Legeme 1:
$$T - m_1\, g = m_1\, a \tag{1}$$
- Legeme 2:
$$\begin{aligned} m_2\, g\, \sin\theta - T &= m_2\, a && (2)\\ n - m_2\, g\, \cos\theta &= 0 && (3) \end{aligned}$$

Adderer sammen ligningene (1) og (2):

$$m_2\, g\, \sin\theta - m_1\, g = (m_1 + m_2)\, a$$

Som gir for akselerasjonen:

$$a = g\,\frac{m_2\, \sin\theta - m_1}{m_1 + m_2} \tag{4}$$

Aktuell tallverdi:

$$a = 9.80\,\frac{6.00 \cdot \sin 55.0^\circ - 2.00}{8.00}\,\mathrm{m/s^2} = 3.57\,\mathrm{m/s^2}$$

(b) Fra ligning (1):

$$T = m_1\,(a+g) = 2.00\,(3.57+9.80)\,\mathrm{N} = 26.7\,\mathrm{N}$$

Fra ligning (3):

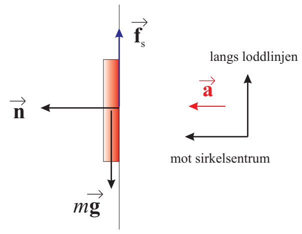
$$n = m_2\,g\,\cos\theta = (6.00\,\mathrm{kg})\cdot(9.80\,\mathrm{m/s^2})\,\cos 55.0^\circ = 33.7\,\mathrm{N}$$

Den kritiske helningsvinkel, θ_c, er gitt ved at telleren i ligning (4) blir null:

$$\begin{aligned} m_2\,\sin\theta_c - m_1 &= 0 \;\Downarrow \\ \sin\theta_c &= \frac{m_1}{m_2} = \frac{1}{3} \;\Downarrow \\ \theta_c &= 19.5^\circ \end{aligned}$$

OPPGAVE 5.

(a) Frilegemediagrammet for massen m er vist i figuren under. Aktuelle krefter er tyngdekraften, friksjonskraften og normalkraften fra underlaget (veggen) på massen:



For at massen ikke skal begynne å falle, må tyngdekraft og friksjonskraft være i balanse. Siden det ikke er noen relativ bevegelse mellom masse og sylindervegg, er det statisk friksjonskraft som er virksom. Newtons 2.lov gir:

$$f_s - m\,g = 0 \tag{5}$$

Videre følger det at normalkraften svarer for sentripetalakselerasjonen:

$$n = m\,\frac{v^2}{R} = m\,\frac{(\omega\,R)^2}{R} = m\,\omega^2\,R \tag{6}$$

For statisk friksjon vil

$$f_s = \mu\,n \quad \Rightarrow \quad \mu \in (0, \mu_s) \tag{7}$$

Fra ligning (5) har vi at aktuell friksjonskraft er

$$f_s = m\,g$$

og ved å kombinere informasjonen ovenfor finner vi at,

$$\begin{aligned} \mu\,m\,\omega^2\,R &= m\,g \;\Downarrow \\ \omega^2 &= \frac{g}{\mu\,R} \end{aligned}$$

Minste verdi for vinkelhastighet finner vi når statistisk friksjon utnyttes "fullt ut", det vil si når $\mu = \mu_s$:

$$\omega_{\min}^2 = \frac{g}{\mu_s\,R} \quad \Rightarrow \omega_{\min} = \sqrt{\frac{g}{\mu_s\,R}}$$

(b) Sylinderens omløpsperiode, T, er gitt ved

$$\begin{aligned} T &= \frac{2\,\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{2\,\omega_{\min}} = \frac{\pi}{\omega_{\min}} \Downarrow \\ &= \pi\sqrt{\frac{\mu_s\,R}{g}} \Downarrow \\ &= \pi\sqrt{\frac{0.200\ \cdot(5.00\,\mathrm{m})}{(9.80\,\mathrm{m/s^2})}} \\ &= 1.00\,\mathrm{s} \end{aligned}$$

Antall omdreininger i ett minutt, n, blir følgelig $n = 60$.

Ved å nytte ligning (6) finner vi at

$$\frac{n}{m\,g} = \frac{\omega^2\,R}{g} = \frac{(2\,\omega_{\min})^2\,R}{g} = 4\,\frac{g}{\mu_s\,R}\cdot\frac{R}{g} = \frac{4}{\mu_s} = 20.0$$

OPPGAVE 6.

(a) Vi nytter arbeid-kinetisk energi teoremet. Arbeidet utført av fjæren uttrykkes ved differensen i potensiell energi, $U_s = \frac{1}{2}\,k\,\Delta x^2$, mellom begynnelses og slutt-tilstand:

$$\begin{aligned} \Delta K + \Delta U_s &= -f_k\,d \;\Downarrow \\ -\frac{1}{2}\,m\,v^2 + \frac{1}{2}\,k\,d^2 &= -f_k\,d \;\Downarrow \\ \frac{1}{2}\,k\,d^2 + f_k\,d - \frac{1}{2}\,m\,v^2 &= 0 \end{aligned}$$

Vi har her nyttet symbolet d for sammentrykningen av fjæren idet klossen stopper opp. $f_k = 15.0\,\mathrm{N}$ er den kinetiske friksjonskraften. Analysen har følgelig gitt oss en 2. grads ligning for d. Med de aktuelle tallverdiene (d er i enheten m).

$$5000\,d^2 + 15\,d - 16 = 0 \quad \Rightarrow \quad d = 5.5 \times 10^{-2}\,\mathrm{m} = 5.5\,\mathrm{cm}$$

(b) Vi nytter også her arbeid-kinetisk energi teoremet. Arbeidet utført av tyngdekraften assosieres med potensiell energi $U_g = m\,g\,y$.

$$\begin{aligned} \Delta K + \Delta U_g &= -f_{k1}\,d_1 - f_{k2}\,d_2 \;\Downarrow \\ 0 - m\,g\,H &= -(\mu_k\,m\,g\,\cos\theta)\,d_1 - (\mu_k\,m\,g)\,d_2 \;\Downarrow \\ H &= \mu_k\,\cos\theta\,d_1 + \mu_k\,d_2 \end{aligned}$$

Siden kinetisk friksjon, f_k, er gitt ved $f_k = \mu_k\,n$, der n er normalkraften fra underlaget på steinblokken, må en være nøye med å nytte korrekt uttrykk for n i den "sammensatte" bevegelsen.
Fra figur 8 i oppgaveteksten ser vi at $d_1\,\sin\theta = H$, slik at

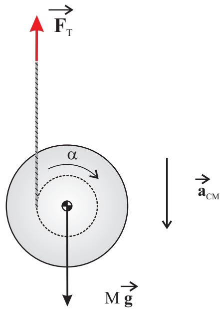
$$\mu_k\,d_2 = H - \mu_k\,\cos\theta\,\frac{H}{\sin\theta} = H\,\left(1 - \frac{\mu_k}{\tan\theta}\right)$$

Vi finner følgelig at

$$\frac{d_2}{H} = \frac{1}{\mu_k} - \frac{1}{\tan\theta} = \frac{1}{0.600} - \frac{1}{\tan 45.0^\circ} = 0.667$$

OPPGAVE 7.

(a) Aktuelt frilegemediagram:



Newtons 2. lov for massesenterbevegelsen:

$$M\,g - F_T = M\,a_{CM} \tag{8}$$

Momentsatsen om massesenteret for rotasjonsbevegelsen

$$\begin{aligned} F_T \left(\frac{1}{2}R\right) &= I_{CM}\,\alpha \;\Downarrow \\ &= \frac{1}{2}M\,R^2\,\alpha \;\Downarrow \\ F_T &= M\,R\,\alpha \end{aligned} \tag{9}$$

Vi har her nyttet det oppgitte uttrykket for treghetsmomentet for en kompakt sylinder.

(b) At jojoen ruller på snora gir oss ligningen:

$$a_{CM} = \alpha\left(\frac{1}{2}R\right) \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = \frac{2}{R}\,a_{CM} \tag{10}$$

Setter vi ligning (10) inn i ligning (9) finner vi at

$$F_T = 2\,M\,a_{CM} \tag{11}$$

Adderer vi ligningene (8) og (9) får vi for massesenterakselerasjonen:

$$\begin{aligned} m\,g &= 3\,M\,a_{CM} \;\Downarrow \\ a_{CM} &= \frac{1}{3}\,g \end{aligned}$$

Settes dette resultatet inn i ligning (11) finner vi for snordraget:

$$F_T = \frac{2}{3}\,M\,g$$