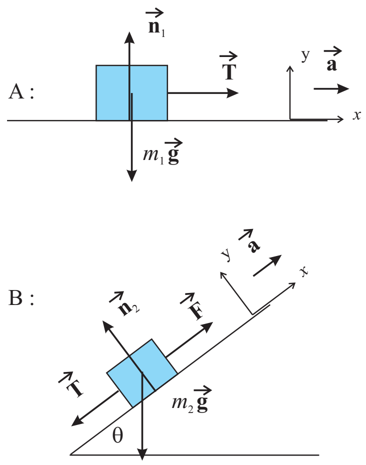
BIT 100 Fysikk

Eksamen 16.02.11 - Løsningsforslag.

OPPGAVE 1.

(a) Frilegemediagram:



(b) Anvendelse av Newtons 2. lov for kasse A:

$$\begin{aligned} x-\text{retn.}: &\qquad T = m_1\,a \qquad (1)\\ y-\text{retn.}: &\qquad n_1 - m_1\,g = 0 \end{aligned}$$

For kassse B:

$$\begin{aligned} x-\text{retn.}: &\qquad F - T - m_2\,g\,\sin\theta = m_2\,a \qquad (2)\\ y-\text{retn.}: &\qquad n_2 - m_2\,g\,\cos\theta = 0 \end{aligned}$$

Adderer ligningene (1) og (2):

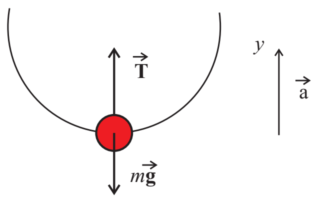
$$(m_1+m_2)\,a = F - m_2\,g\,\sin\theta \;\Leftrightarrow\; a = \frac{F - m_2\,g\,\sin\theta}{m_1+m_2}$$

Med de aktuelle tallverdiene:

$$a = \frac{12.0\,\mathrm{N} - (1.00\,\mathrm{kg})\cdot(9.80\,\mathrm{m/s^2})\cdot\sin 36.9^\circ}{4.00\,\mathrm{kg}} = 1.53\,\mathrm{m/s^2}$$

OPPGAVE 2.

(a) Frilegemediagram:



Ballen erfarer sentripetalakselerasjon:

$$
\begin{aligned}
T - m\,g &= m\,\frac{v^2}{r} \;\Downarrow \\
v^2 &= \left(\frac{T}{m} - g\right) r \;\Downarrow \\
v &= \sqrt{\left(\frac{T}{m} - g\right) r}
\end{aligned}
$$

Tallverdi for ballens fart:

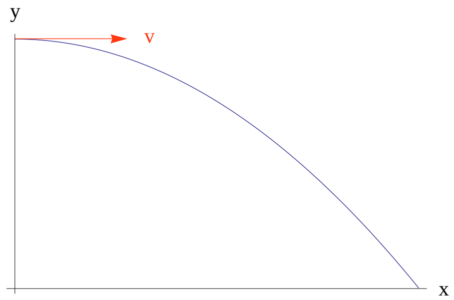
$$
v = \sqrt{\left(\frac{5.00\,\mathrm{N}}{0.100\,\mathrm{kg}} - 9.80\,\mathrm{m/s^2}\right) \cdot (0.60\,\mathrm{m})} = 4.91\,\mathrm{m/s}
$$

(b) I bunn av sirkelbanen er ballens hastighetsvektor, $\vec{\mathbf{v}}$, rettet horisontalt.

$$\vec{\mathbf{v}} = v\,\hat{\imath}$$

Idet snoren kuttes, vil ballen bevege seg under innflytelse av tyngdekraften alene. Vi har derfor en todimensjonal bevegelse med konstant akselerasjon der begynnelsesbetingelsene er:

$$(x_i, y_i) = (0, h - r) \qquad (v_{xi}, v_{yi}) = (v, 0)$$



Baneligningen for denne situasjon er:

$$(y_f - y_i) = -\frac{g}{2\,v_{xi}^2}\,(x_f - x_i)^2$$

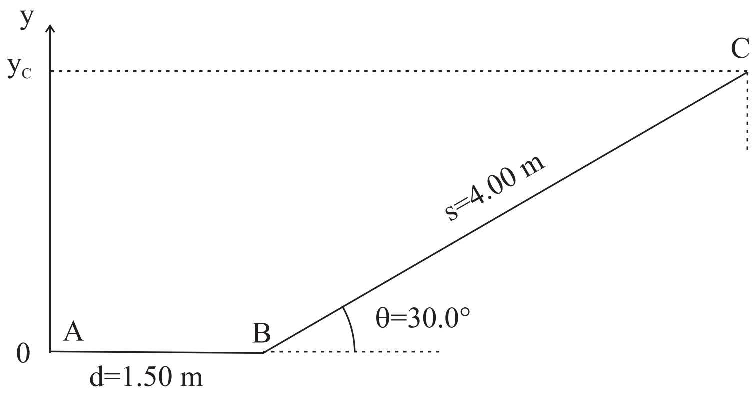
Når ballen lander, er $y_f = 0.0\,\mathrm{m}$. Dette gir oss:

$$x_f^2 = \frac{2\,v^2}{g}\,(h - r) = 2\left(\frac{T}{m\,g} - 1\right)\,r\,(h - r)$$

Tallverdi:

$$x_f = \sqrt{2\left(\frac{5.00\,\mathrm{N}}{(0.100\,\mathrm{kg})\cdot(9.80\,\mathrm{m/s^2})} - 1\right)\,(0.60\,\mathrm{m})\,(1.40\,\mathrm{m})} = 2.63\,\mathrm{m}$$

OPPGAVE 3.



(a) La A betegne klossens startposisjon (sammentrykket fjær), B nedre posisjon og C øvre posisjon på skråplanet. Nullnivået på y-aksen legges til den horisontale delen gitt ved linjen AB, dvs. $y_A = y_B = 0\,\mathrm{m}$. Systemets mekaniske energi (kloss i tyngdefeltet + fjær) i posisjonene A og C er:

$$
\begin{aligned}
E_{\mathrm{mek,A}} &= \frac{1}{2}\,k\,\Delta x^2 \\
E_{\mathrm{mek,C}} &= \frac{1}{2}\,m\,v_C^2 + m\,g\,y_C
\end{aligned}
$$

Her er v_C klossens fart på toppen av skråplanet. Det er denne størrelsen som vi skal bestemme.

Endringen i mekanisk energi under bevegelsen fra A til C svarer til friksjonsarbeidet som er utført. Dette kan uttrykkes ved:

$$E_{\mathrm{mek,C}} - E_{\mathrm{mek,A}} = -(\mu_k\,n_{AB}\,d + \mu_k\,n_{BC}\,s)$$

Her er n_{AB} størrelsen på normalkraften fra underlaget på klossen på strekningen AB, mens n_{BC} er tilsvarende størrelse på strekningen BC. Det gjelder:

$$
\begin{aligned}
n_{AB} &= m\,g \\
n_{BC} &= m\,g\,\cos\theta \\
y_C &= s\,\sin\theta
\end{aligned}
$$

Det følger at:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\, m\, v_{\mathrm{C}}^2 &= \frac{1}{2}\, k\, \Delta x^2 - m\, g\, s\, \sin\theta - \mu_k\, (m\, g\, d + m\, g\, s\, \cos\theta) \;\Downarrow \\
v_{\mathrm{C}} &= \sqrt{\frac{k}{m}\, \Delta x^2 - 2\, g\, s\, (\mu_k\, \frac{d}{s} + \sin\theta + \mu_k\, \cos\theta)}
\end{aligned}$$

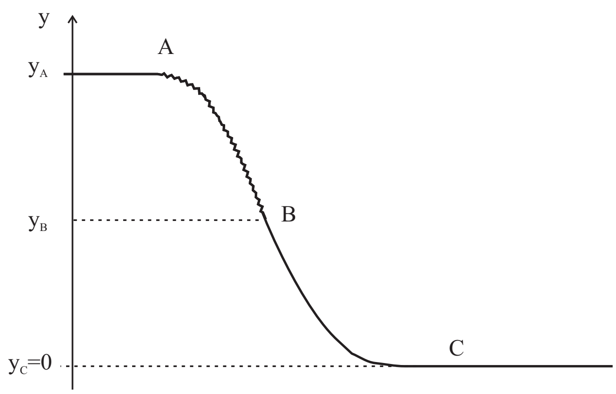
Sjekk av dimensjoner:

$$\begin{aligned}
\left[\, \frac{k}{m}\, \Delta x^2 \right] &= \frac{\mathrm{kg\, m/s^2}}{\mathrm{kg\, m}}\, \mathrm{m}^2 = (\mathrm{m/s})^2 \\
[\, g\, s\,] &= \mathrm{m/s^2\, m} = (\mathrm{m/s})^2
\end{aligned}$$

Vi finner for klossens fart på toppen av skråplanet:

$$\begin{aligned}
v_{\mathrm{C}} &= \sqrt{\frac{500}{0.500}\, (0.300)^2 - 2 \cdot 9.80 \cdot 4.00 \left(0.350\, \frac{1.50}{4.00} + 0.500 + 0.350 \cdot 0.866\right)}\ \mathrm{m/s} \\
&= 4.09\, \mathrm{m/s}
\end{aligned}$$

(b)



Bevegelsen fra A til B er en ren rullebevegelse. Mekanisk energi (kinetisk energi + potensiell energi i tyngdefeltet) er da bevart. Vi må imidlertid huske på at rullebevegelse er en sammensatt bevegelse med en translatorisk del og en rotasjonsdel. Samlet kinetisk energi er:

$$K = \frac{1}{2}\, m\, v_{\mathrm{CM}}^2 + \frac{1}{2}\, I_{\mathrm{CM}}\, \omega^2 = \frac{1}{2}\, m\, v_{\mathrm{CM}}^2 + \frac{1}{2}\, \left(\frac{2}{5}\, m\, r^2\right)\, \left(\frac{v_{\mathrm{CM}}}{r}\right)^2 = \frac{7}{10}\, m\, v_{\mathrm{CM}}^2$$

Vi har her hentet uttrykket for treghetsmomentet, I_{CM}, fra vedlagt tabell, og videre nyttet rullebetingelsen $v_{\mathrm{CM}} = \omega\, r$. r er steinblokkens radius. Hverken verdien av r, eller verdien av blokkens masse, m, er nødvendige for å kunne besvare oppgaven. Det følger at:

$$m\, g\, y_{\mathrm{A}} = m\, g\, y_{\mathrm{B}} + \frac{7}{10}\, m\, v_{\mathrm{CM,B}}^2 \tag{3}$$

Under bevegelsen fra B til C vil rotasjonshastigheten og dermed rotasjonsenergien ($\frac{1}{2}\, I_{\mathrm{CM}}\, \omega_{\mathrm{B}}^2$) være uendret. Følgelig vil bevaring av mekanisk energi kunne uttrykkes ved:

$$m\, g\, y_{\mathrm{B}} + \frac{1}{2}\, m\, v_{\mathrm{CM,B}}^2 = m\, g\, y_{\mathrm{C}} + \frac{1}{2}\, m\, v_{\mathrm{CM,C}}^2 \tag{4}$$

Vi ser at massen m kanselleres mellom høgre og venstre side i begge ligningene (3) og (4). Fra ligning (3) følger det at:

$$v_{\mathrm{CM,B}}^2 = \frac{10}{7}\, g\, (y_{\mathrm{A}} - y_{\mathrm{B}}) \tag{5}$$

Nytter vi ligning (5) i ligning (4) følger det:

$$\frac{1}{2}\, v_{\mathrm{CM,C}}^2 = g\, (y_{\mathrm{B}} - y_{\mathrm{C}}) + \frac{5}{7}\, g\, (y_{\mathrm{A}} - y_{\mathrm{B}}) = g\, \frac{h}{2} + \frac{5}{7}\, g\, \frac{h}{2} = \frac{1}{2}\, \frac{12}{7}\, g\, h$$

eller

$$v_{\mathrm{CM,C}} = \sqrt{\frac{12}{7}\, g\, h}$$

Med de aktuelle tallverdier:

$$v_{\mathrm{CM,C}} = \sqrt{\frac{12}{7}\, (9.80\,\mathrm{m/s^2}) \cdot (50.0\,\mathrm{m})} = 29.0\,\mathrm{m/s}$$

OPPGAVE 4.

(a) Fra tabell 10.2 har vi at treghetsmomentet for en rund skive (sylinder) om en akse langs symmetriaksen gjennom massesenteret er $I_{\rm CM} = \frac{1}{2}\, m\, r^2$. Objektets treghetsmoment om den gitte rotasjonsaksen er summen av treghetsmomentene til de to legemene. For skive B må vi nytte Steiners setning for å bestemme bidraget. Vi skriver for skive A:

$$I_{\rm A} = \frac{1}{2}\, M_{\rm A}\, r_{\rm A}^2$$

Og for skive B:

$$I_{\rm B} = \frac{1}{2}\, M_{\rm B}\, r_{\rm B}^2 + M_{\rm B}\,(r_{\rm A} - r_{\rm B})^2$$

For det sammensatte objektet tilskriver vi symbolet $I_{\rm O}$ til treghetsmomentet:

$$\begin{aligned} I_{\rm O} &= I_{\rm A} + I_{\rm B} \\ &= \frac{1}{2}\, M_{\rm A}\, r_{\rm A}^2 + \frac{1}{2}\, M_{\rm B}\, r_{\rm B}^2 + M_{\rm B}\,(r_{\rm A} - r_{\rm B})^2 \\ &= \frac{1}{2}\,(M_{\rm A} + 2\, M_{\rm B})\, r_{\rm A}^2 - 2\, M_{\rm B}\, r_{\rm A}\, r_{\rm B} + \frac{3}{2}\, M_{\rm B}\, r_{\rm B}^2 \end{aligned}$$

Aktuell tallverdi blir:

$$\begin{aligned} I_{\rm O} &= \frac{1}{2}\,(2.40\,{\rm kg}) \cdot (0.250\,{\rm m})^2 - 2\,(0.200\,{\rm kg}) \cdot (0.250\,{\rm m}) \cdot (0.0250\,{\rm m}) + \\ &\quad \frac{3}{2}\,(0.200\,{\rm kg})\,(0.0250\,{\rm m})^2 \\ &= 7.27 \times 10^{-2}\,{\rm kgm}^2 \end{aligned}$$

(b) Fra bevegelsesligningen for rotasjon om en fast akse finner vi at rotasjonsbevegelsen stopper opp ($\omega_f = 0$) ved tidspunktet t gitt:

$$0 = \omega_i + \alpha\, t$$

Vinkelakselerasjonen α er gitt fra momentsatsen:

$$I_{\rm O}\, \alpha = -\tau$$

$-$ tegnet er en følge av at friksjon reduserer rotasjonshastigheten. Det følger at

$$t = -\frac{\omega_i}{\alpha} = \frac{\omega_i\, I_{\rm O}}{\tau}$$

Med det aktuelle tallmaterialet:

$$t = \frac{(2\,\pi\,{\rm s}^{-1}) \cdot (7.27 \times 10^{-2}\,{\rm kgm}^2)}{(0.200\,{\rm Nm})} = 2.28\,{\rm s}$$

OPPGAVE 5.

(a) Kaller kulens fart før kollisjonen med kloss 1 for v_i og dens fart før kollisjonen med kloss 2 for v_f (svarer til dens hastighet etter å ha gjennomboret kloss 1). Bevaring av bevegelsesmengde i kollisjonsprosessen kule–kloss 1 uttrykkes da ved:

$$m\,v_i = M_1\,v_1 + m\,v_f \tag{6}$$

Bevaring av bevegelsesmengde i kollisjonsprosessen kule–kloss 2 uttrykkes:

$$m\,v_f = (M_2 + m)\,v_2 \tag{7}$$

Ved å kombinere ligningene (6) og (7) følger det at:

$$m\,v_i = M_1\,v_1 + (M_2 + m)\,v_2$$

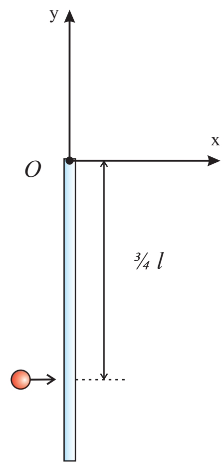
eller

$$v_i = v_2 + \frac{M_1\,v_1 + M_2\,v_2}{m}$$

Det oppgitte tallmaterialet gir:

$$\begin{aligned} v_i &= 1.40\,\mathrm{m/s} + \frac{(1.20\,\mathrm{kg})\cdot(0.630\,\mathrm{m/s}) + (1.80\,\mathrm{kg})\cdot(1.40\,\mathrm{m/s})}{(3.50\times 10^{-3}\,\mathrm{kg})} \\ &= 1.40\,\mathrm{m/s} + 936\,\mathrm{m/s} = 937\,\mathrm{m/s} \end{aligned}$$

(b) Plasserer referense koordinatsystemet med z-aksen i opphengingspunktet O pekende ut av tegneplanet.



Spinnbevaring svarer nå til at z-komponenten, L_z, av spinnet, $\vec{\mathbf{L}}$, har samme verdi for systemet kule pluss stang før og etter kollisjonen:

$$\begin{aligned}
\frac{3}{4}\, m\, v_i\, l &= \frac{1}{3}\,\frac{W_s}{g}\, l^2\, \omega_f - \frac{3}{4}\, m\, v_f\, l \;\Downarrow \\
\frac{3}{4}\, m\,(v_i + v_f) &= \frac{1}{3}\,\frac{W_s}{g}\, l\, \omega_f \;\Downarrow \\
\omega_f &= \frac{9}{4}\,\frac{m\, g}{W_s}\,\frac{v_i + v_f}{l}
\end{aligned}$$

Her er $v_i = 10.0\,\mathrm{m/s}$ og $v_f = 6.00\,\mathrm{m/s}$ kulens *fart* før og etter kollisjon. W_s symboliserer stangens tyngde. (W_s/g) er stangens masse M_s. Stangens treghetsmoment $(\frac{1}{3}\, M_s\, l^2)$, ved rotasjon om en akse normalt stangen gjennom endepunktet, er hentet fra vedlagte tabell. Vi finner

$$\omega_f = \frac{9}{4}\,\frac{(3.00\,\mathrm{kg})\cdot(9.80\,\mathrm{m/s^2})}{(90.0\,\mathrm{N})}\,\frac{(16.0\,\mathrm{m/s})}{(2.00\,\mathrm{m})} = 5.88\,\mathrm{s^{-1}}$$

OPPGAVE 6.

(a) Ved tidspunktet $t = 2\,\mathrm{s}$ har vi vektorligningene:

$$\begin{aligned}\vec{\mathbf{r}}_f &= \vec{\mathbf{r}}_i + (2\,\mathrm{s})\,\vec{\mathbf{v}}_i + (2\,\mathrm{s}^2)\,\vec{\mathbf{a}} \\ \vec{\mathbf{v}}_f &= \vec{\mathbf{v}}_i + (2\,\mathrm{s})\,\vec{\mathbf{a}}\end{aligned}$$

Eliminerer $\vec{\mathbf{v}}_i$ mellom disse to ligningene:

$$\vec{\mathbf{r}}_f = \vec{\mathbf{r}}_i + (2\,\mathrm{s})\,[\,\vec{\mathbf{v}}_f - (2\,\mathrm{s})\,\vec{\mathbf{a}}\,] + (2\,\mathrm{s}^2)\,\vec{\mathbf{a}} = \vec{\mathbf{r}}_i + (2\,\mathrm{s})\,\vec{\mathbf{v}}_f - (2\,\mathrm{s}^2)\,\vec{\mathbf{a}}$$

Følgelig er

$$\vec{\mathbf{a}} = \frac{1}{(1\,\mathrm{s})}\,\vec{\mathbf{v}}_f + \frac{\vec{\mathbf{r}}_i - \vec{\mathbf{r}}_f}{(2\,\mathrm{s}^2)}$$

Og med $\vec{\mathbf{v}}_f = (5\,\hat{\imath} - 6\,\hat{\jmath})\,\mathrm{m/s}$, $\vec{\mathbf{r}}_i = (4\,\hat{\imath} + 3\,\hat{\jmath})\,\mathrm{m}$ og $\vec{\mathbf{r}}_f = (10\,\hat{\imath} - 2\,\hat{\jmath})\,\mathrm{m}$, finner vi:

$$\vec{\mathbf{a}} = (5\,\hat{\imath} - 6\,\hat{\jmath})\,\mathrm{m/s}^2 + \frac{(-6\,\hat{\imath} + 5\,\hat{\jmath})}{2}\,\mathrm{m/s}^2 = \left(2\,\hat{\imath} - \frac{7}{2}\,\hat{\jmath}\right)\,\mathrm{m/s}^2$$

(b) Kaller origoposisjonen, $x = 0.00\,\mathrm{m}$ for A mens $x = 6.00\,\mathrm{m}$ tilskrives symbolet B. Aktuelt arbeid W_{AB} blir:

$$\begin{aligned}W_{\mathrm{AB}} &= \int_A^B F_x\,dx \\ &= \frac{1}{2}\,(4.00\,\mathrm{m} + 2.00\,\mathrm{m}) \cdot (3.00\,\mathrm{N}) - \frac{1}{2}\,(2.00\,\mathrm{m} + 1.00\,\mathrm{m}) \cdot (3.00\,\mathrm{N}) \\ &= 4.50\,\mathrm{J}\end{aligned}$$

Vi har her gjort en ren geometrisk analyse ved å ta differensen mellom arealene av to trapes.
Nytter så arbeid-kinetisk energi teoremet:

$$\Delta K = K_{\mathrm{B}} - K_{\mathrm{A}} = K_{\mathrm{B}} = W_{\mathrm{AB}}$$

siden partikkelen er i ro i posisjon A. Klossens fart v_{B} i posisjon B blir da:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\,m\,v_{\mathrm{B}}^2 &= W_{\mathrm{AB}} \;\Downarrow \\ v_{\mathrm{B}} &= \sqrt{\frac{2\,W_{\mathrm{AB}}}{m}} \;\Downarrow \\ &= \sqrt{\frac{2 \cdot (4.50\,\mathrm{J})}{(4.00\,\mathrm{kg})}} = 1.50\,\mathrm{m/s}\end{aligned}$$