BIT 100 Fysikk

Eksamen 18.02.12 - Løsningsforslag.

OPPGAVE 1.

(a) Bevegelse med stykkevis konstant akselerasjon:

$$a_x = \begin{cases} 2\,\mathrm{m/s^2} & \text{for} \quad 0\,\mathrm{s} \le t < 10\,\mathrm{s} \\ 0\,\mathrm{m/s^2} & \text{for} \quad 10\,\mathrm{s} \le t < 15\,\mathrm{s} \\ -3\,\mathrm{m/s^2} & \text{for} \quad 15\,\mathrm{s} \le t < 20\,\mathrm{s} \end{cases}$$

Det gjelder at partikkelens hastighet etter 20 s, $v_x(20\,\mathrm{s})$, er gitt ved:

$$v_x(20\,\mathrm{s}) = v_x(0\,\mathrm{s}) + \int_{0\,\mathrm{s}}^{20\,\mathrm{s}} a_x(t)\,\mathrm{d}t$$

Integralet svarer til arealet under $a_x(t)$ kurven i det gitte tidsintervallet. Siden partikkelen er i ro ved $t = 0\,\mathrm{s}$, er $v_x(0\,\mathrm{s}) = 0\,\mathrm{m/s}$, og det følger at:

$$v_x(20\,\mathrm{s}) = (2\,\mathrm{m/s^2}) \cdot (10\,\mathrm{s}) + (0\,\mathrm{m/s^2}) \cdot (5\,\mathrm{s}) + (-3\,\mathrm{m/s^2}) \cdot (5\,\mathrm{s}) = 5\,\mathrm{m/s}$$

(b) Sentripetalakselerasjonen, a_c, er relatert til banefarten, v, ved uttrykket:

$$a_c = \frac{v^2}{r} \qquad \Leftrightarrow \qquad v = \sqrt{a_c\, r}$$

Der r er radius i sirkelbanen. a_c er størrelsen av komponenten til akselerasjonsvektoren rettet inn mot sirkelens sentrum. Det følger at:

$$a_c = |\vec{\mathbf{a}}|\, \cos 30.0^\circ = (15.0\,\mathrm{m/s^2}) \cdot (0.866) = 13.0\,\mathrm{m/s^2}$$

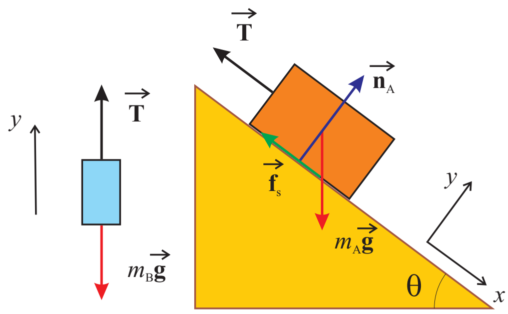
Slik at:

$$v = \sqrt{(13.0\,\mathrm{m/s^2}) \cdot (2.50\,\mathrm{m})} = 5.70\,\mathrm{m/s}$$

OPPGAVE 2.

(a) Den minste verdien for massen, $m_{\text{B}} = m_{\text{B},min}$, vil være knyttet til at blokk A akkurat er på grensen til å begynne å skli nedover skråplanet. Blokk B er da akkurat på grensen til å heves. Maksimal statisk friksjonskraft er aktiv.

Aktuelt frilegemediagram:



Siden systemet er i ro, vil Newtons 2. lov ta form av ligningene:

- Blokk A:

$$
\begin{aligned}
x - \text{retning}: \qquad m_{\text{A}}\, g\, \sin\theta - T - f_{s,max} &= 0 \\
y - \text{retning}: \qquad n_{\text{A}} - m_{\text{A}}\, g\, \cos\theta &= 0
\end{aligned}
$$

- Blokk B:

$$
y - \text{retning}: \qquad T - m_{\text{B}}\, g = 0
$$

For den statiske friksjonskraften på blokk A har vi da uttrykket:

$$
f_{s,max} = \mu_s\, n_{\text{A}} = \mu_s\, m_{\text{A}}\, g\, \cos\theta
$$

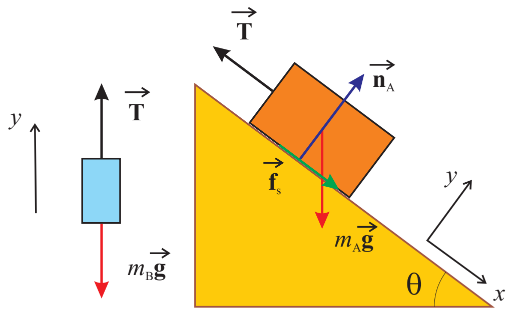
Det følger at:

$$
\begin{aligned}
m_{\text{B}} = m_{\text{B},min} &= \frac{T}{g} = \frac{m_{\text{A}}\, g\, \sin\theta - f_{s,max}}{g} \\
&= \frac{m_{\text{A}}\, g\, \sin\theta - \mu_s\, m_{\text{A}}\, g\, \cos\theta}{g} \\
&= m_{\text{A}}\, (\sin\theta - \mu_s\, \cos\theta)
\end{aligned}
$$

Med de aktuelle tallverdier:

$$
\begin{aligned}
m_{\text{B},min} &= (10.0\,\text{kg}) \cdot [\, \sin 36.9^\circ - (0.400) \cdot \cos 36.9^\circ \,] \\
&= (10.0\,\text{kg}) \cdot (0.600 - 0.400 \cdot 0.800) \\
&= 2.80\,\text{kg}
\end{aligned}
$$

Den største verdien for massen, $m_{\text{B}} = m_{\text{B},max}$, vil være knyttet til at blokk A akkurat er på grensen til å begynne å bevege seg oppover skråplanet. Blokk B er da akkurat på grensen til å senkes. Maksimal statisk friksjonskraft er aktiv.
Aktuelt frilegemediagram:



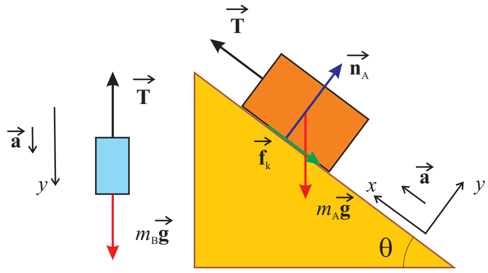
Analysen vil bli eksakt lik den ovenfor, men med fortegnsskifte for friksjonskraften. Det følger at:

$$\begin{aligned} m_{\text{B},max} &= m_{\text{A}}\,(\sin\theta + \mu_s\,\cos\theta) \\ &= (10.0\,\text{kg})\cdot[\,\sin 36.9^\circ + (0.400)\cdot\cos 36.9^\circ\,] \\ &= (10.0\,\text{kg})\cdot(0.600 + 0.400\cdot 0.800) \\ &= 9.20\,\text{kg} \end{aligned}$$

Det følger at med m_{B} i verdi-intervallet $m_{\text{B}} \in (2.80\,\text{kg}, 9.20\,\text{kg})$ vil systemet av de to blokkene forbli i ro.

(b) Etter analysen under punkt (a), følger det at når $m_{\mathrm{B}} = 10.0\,\mathrm{kg}$, vil systemet av de to blokkene bevege seg slik at B senkes mens A glir oppover skråplanet. Massene vil ha samme størrelse på sine akselerasjoner, her gitt symbolet a.

Aktuelt frilegemediagram:



Newtons 2. lov utskrevet:

- Blokk A:

$$
\begin{aligned}
x-\text{retning}: \qquad T - m_{\mathrm{A}}\,g\,\sin\theta - f_k &= m_{\mathrm{A}}\,a \\
y-\text{retning}: \qquad n_{\mathrm{A}} - m_{\mathrm{A}}\,g\,\cos\theta &= 0
\end{aligned}
$$

- Blokk B:

$$
y-\text{retning}: \qquad m_{\mathrm{B}}\,g - T = m_{\mathrm{B}}\,a
$$

For den kinetiske friksjonskraften på blokk A har vi da uttrykket:

$$
f_k = \mu_k\,n_{\mathrm{A}} = \mu_k\,m_{\mathrm{A}}\,g\,\cos\theta
$$

Når vi adderer de to bevegelsesligningene (for blokk A i x-retningen og for blokk B i y-retningen), eliminerer vi snordraget T. Det følger at:

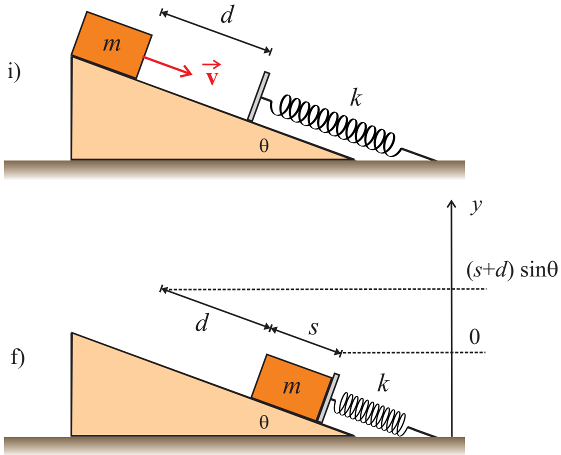
$$
\begin{aligned}
(m_{\mathrm{A}} + m_{\mathrm{B}})\,a &= m_{\mathrm{B}}\,g - m_{\mathrm{A}}\,g\,\sin\theta - \mu_k\,m_{\mathrm{A}}\,g\,\cos\theta \;\Downarrow \\
a &= g\,\frac{m_{\mathrm{B}} - m_{\mathrm{A}}\,(\sin\theta + \mu_k\,\cos\theta)}{(m_{\mathrm{A}} + m_{\mathrm{B}})}
\end{aligned}
$$

Aktuelle tallverdier:

$$
\begin{aligned}
a &= (9.80\,\mathrm{m/s^2})\,\frac{(10.0\,\mathrm{kg}) - (10.0\,\mathrm{kg})\cdot(0.600 + 0.300\cdot 0.800)}{(20.0\,\mathrm{kg})} \\
&= (9.80\,\mathrm{m/s^2})\cdot(0.080) \\
&= 0.784\,\mathrm{m/s^2}
\end{aligned}
$$

OPPGAVE 3.

(a) Aktuell figur:



Vi nytter at vi har bevaring av mekanisk energi:

$$\begin{aligned} \Delta K + \Delta U_g + \Delta U_s &= 0 \Downarrow \\ \left(0 - \frac{1}{2}\, m\, v^2\right) + [\,0 - m\, g\, (s+d)\, \sin\theta\,] + \left(\frac{1}{2}\, k\, s^2 - 0\right) &= 0 \Downarrow \\ \frac{1}{2}\, k\, s^2 - (m\, g\, \sin\theta)\, s - \left(\frac{1}{2}\, m\, v^2 + m\, g\, d\, \sin\theta\right) &= 0 \end{aligned}$$

Vi har følgelig funnet en annengradsligning for fjærens maksimale sammentrykking, som vi har gitt symbolet s. Merk at nullpunktet for massens potensielle energi i tyngdefeltet er lagt til tilstanden med maksimal sammentrykket fjær.

Med de aktuelle talleverdier:

$$(250\,\mathrm{N/m})\, s^2 - (8.379\,\mathrm{N})\, s - (3.217\,\mathrm{Nm}) = 0 \;\Downarrow$$

$$s = \frac{(8.379\,\mathrm{N}) \pm \sqrt{(8.379\,\mathrm{N})^2 + 4 \cdot (250\,\mathrm{N/m}) \cdot (3.217\,\mathrm{Nm})}}{(500\,\mathrm{N/m})}$$

Her er det + tegnet som gir den fysisk akseptable løsning:

$$s = 0.131\,\mathrm{m} = 13.1\,\mathrm{cm}$$

(b) Vi nytter igjen bevaring av mekanisk energi:

$$\begin{aligned} \Delta K + \Delta U_g &= 0 \ \Downarrow \\ K_{\mathrm{S}} + K_{\mathrm{L}} + (-M\,g\,\Delta h - 0) &= 0 \end{aligned}$$

K_{S} representerer sylinderens kinetiske energi, mens K_{L} svarer til loddets kinetiske energi. Vi har lagt nullpunktet for loddets potensielle energi i tyngdefeltet til dets "startpunkt". Δh gir loddets posisjonsendring (loddet senkes). Sylinderens kinetiske energi svarer til dens rotasjonsenergi:

$$K_{\mathrm{S}} = \frac{1}{2}\,I\,\omega^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\,m\,R^2\right)\,\frac{v^2}{R^2} = \frac{1}{4}\,m\,v^2$$

siden et punkt på sylinderens overflate vil ha en tangensiell fart, v, svarende til loddets fart.
Kinetisk energi assosiert med loddets translatoriske bevegelse, er gitt ved uttrykket:

$$K_{\mathrm{L}} = \frac{1}{2}\,M\,v^2 = \frac{2\,M}{m}\,\left(\frac{1}{4}\,m\,v^2\right) = \frac{2\,M}{m}\,K_{\mathrm{S}}$$

Det følger at:

$$\begin{aligned} M\,g\,\Delta h &= \left(1 + \frac{2\,M}{m}\right)\,K_{\mathrm{S}} \ \Downarrow \\ \Delta h &= \frac{\left(1 + \frac{2\,M}{m}\right)\,K_{\mathrm{S}}}{M\,g} \end{aligned}$$

Med de aktuelle tallverdier:

$$\Delta h = \frac{\left[1 + \dfrac{2\cdot(12.0\,\mathrm{kg})}{(10.0\,\mathrm{kg})}\right]\cdot(480\,\mathrm{J})}{(12.0\,\mathrm{kg})\cdot(9.80\,\mathrm{m/s^2})} = 13.9\,\mathrm{m}$$

OPPGAVE 4.

(a) Her nytter vi bevaring av bevegelsesmengde:

$$m_{\mathrm{A}}\,\vec{\mathbf{v}}_{\mathrm{A}} + m_{\mathrm{B}}\,\vec{\mathbf{v}}_{\mathrm{B}} = (m_{\mathrm{A}} + m_{\mathrm{B}})\,\vec{\mathbf{v}}$$

Der $\vec{\mathbf{v}}$ er objektenes felles hastighet etter kollisjonen. Det følger at:

$$\begin{aligned} \vec{\mathbf{v}} &= \frac{m_{\mathrm{A}}}{m_{\mathrm{A}} + m_{\mathrm{B}}}\,\vec{\mathbf{v}}_{\mathrm{A}} + \frac{m_{\mathrm{B}}}{m_{\mathrm{A}} + m_{\mathrm{B}}}\,\vec{\mathbf{v}}_{\mathrm{B}} \;\Downarrow \\ &= \frac{3}{5}\,\vec{\mathbf{v}}_{\mathrm{A}} + \frac{2}{5}\,\vec{\mathbf{v}}_{\mathrm{B}} \;\Downarrow \\ &= (3.00\,\mathrm{m/s})\,\hat{\imath} - (1.20\,\mathrm{m/s})\,\hat{\jmath} \end{aligned}$$

(b) I dette løsningsforslaget betraktes de to massene M og m som punktmasser.

For systemet med massene M og m vil treghetsmomentet, I, om den gitte rotasjonsaksen være:

$$I = I(x) = M\,x^2 + m\,(L - x)^2$$

Den minste verdi for I må svare til at den deriverte av I med hensyn på x er null (og med positiv andre-derivert):

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}x} &= 2\,M\,x + 2\,m\,(L - x)\,(-1) \;\Downarrow \\ &= 2\,[\,(M + m)\,x - m\,L\,] \end{aligned}$$

Det følger at:

$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}x} = 0 \qquad \text{for} \qquad x = \frac{m}{M + m}\,L$$

slik at:

$$\begin{aligned} I_{\mathrm{min}} &= M\left(\frac{m}{M + m}\,L\right)^2 + m\left(L - \frac{m}{M + m}\,L\right)^2 \;\Downarrow \\ &= M\left(\frac{m}{M + m}\,L\right)^2 + m\left(\frac{M}{M + m}\,L\right)^2 \;\Downarrow \\ &= \frac{m\,M}{M + m}\,L^2 \end{aligned}$$

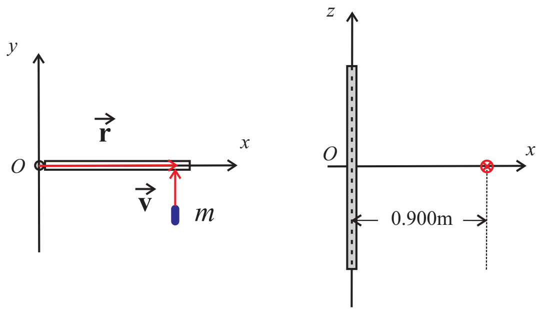
Legger vi origo i vårt koordinatsystem til massen M, har vi at massesenterposisjonen, x_{CM}, for systemet med de to massene er:

$$\begin{aligned} (m+M)\,x_{\mathrm{CM}} &= M\cdot 0 + m\,L \;\Downarrow \\ x_{\mathrm{CM}} &= \frac{m}{m+M}\,L \end{aligned}$$

Det følger, som påstått i oppgaveteksten, at den minste verdien for systemets treghetsmoment, I_{min}, oppnås når rotasjonsaksen går gjennom massesenteret.

OPPGAVE 5.

(a) Nytter følgende koordinatsystem:



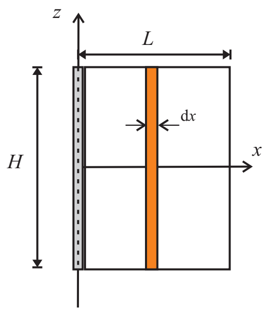
Kulens spinn, $\vec{\mathbf{l}}$, relativt til O blir:

$$\begin{aligned} \vec{\mathbf{l}} &= m\,(\vec{\mathbf{r}}\times\vec{\mathbf{v}}) \;\Downarrow \\ &= (5.00\times 10^{-3}\,\mathrm{kg})\cdot\left[(0.900\,\mathrm{m})\,\hat{\imath}\times(1.00\times 10^{3}\,\mathrm{m/s})\,\hat{\jmath}\right] \;\Downarrow \\ &= (4.50\,\mathrm{kgm^2s^{-1}})\,\hat{k} \end{aligned}$$

Kulens spinn umiddelbart før kollisjonen med døren er rettet langs dørens rotasjonsakse (gjennom hengslene).

(b) Dørens treghetsmoment:

$$I = \int x^2\,\mathrm{d}m \qquad \text{med} \qquad \mathrm{d}m = \frac{M}{L\,H}\,(H\,\mathrm{d}x) = \frac{M}{L}\,\mathrm{d}x$$



slik at:

$$I = \frac{M}{L}\int_0^L x^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\,M\,L^2$$

Med de aktuelle tallverdier:

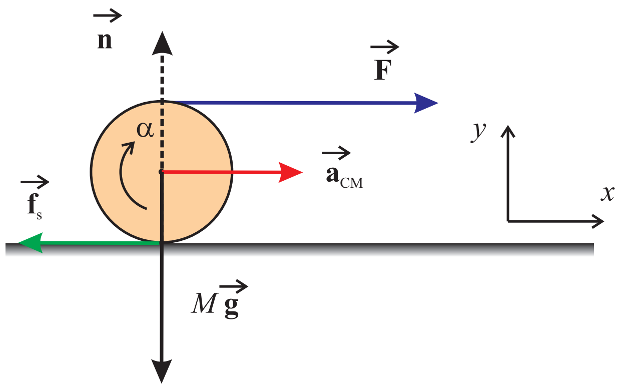
$$I = \frac{1}{3}\cdot(18.0\,\mathrm{kg})\,(1.00\,\mathrm{m})^2 = 6.00\,\mathrm{kgm}^2$$

Vi har bevaring av systemets spinnkomponent langs z-aksen. Siden vi ser bort fra kulens masse (og posisjon) i døren, vil systemets spinnkomponent etter kollisjonen være gitt ved $L_z = I\,\omega$. Vi har da at dørens rotasjonshastighet, ω, blir:

$$\begin{aligned} I\,\omega &= l_z \;\Downarrow \\ \omega &= \frac{l_z}{I} = \frac{4.50\,\mathrm{kgm}^2\mathrm{s}^{-1}}{6.00\,\mathrm{kgm}^2} = 0.750\,\mathrm{s}^{-1} \end{aligned}$$

OPPGAVE 6.

(a) Frilegemediagram:



Det er *antatt* at den statiske friksjonskraften virker i motsatt retning av trekk-kraften $\vec{\mathbf{F}}$.

Newtons 2. lov for massesenterbevegelsen:

$$F - f_s = M\,a_{\text{CM}} \tag{1}$$

Momentsatsen om sylinderens massesenter:

$$(F + f_s)\,R = I_{\text{CM}}\,\alpha$$

For en uniform, kompakt sylinder er I_{CM} gitt ved:

$$I_{\text{CM}} = \frac{1}{2}\,M\,R^2$$

Ved en ren rullebevegelse er:

$$\alpha = \frac{a_{\mathrm{CM}}}{R}$$

Slik at momentsatsen kan uttrykkes ved:

$$F + f_s = \frac{1}{2}\, M\, R^2\, \frac{a_{\mathrm{CM}}}{R^2} = \frac{1}{2}\, M\, a_{\mathrm{CM}} \tag{2}$$

Dersom vi adderer sammen ligningene (1) og (2), eliminerer vi friksjonskraften:

$$2\,F = \frac{3}{2}\, M\, a_{\mathrm{CM}} \qquad \Leftrightarrow \qquad a_{\mathrm{CM}} = \frac{4}{3}\,\frac{F}{M}$$

Alternativt kan en nytte momentsatsen om snellens kontaktpunkt med underlaget. Friksjonskraften har da ingen arm og bidrar følgelig ikke til netto kraftmoment. Sylinderens treghetsmoment om kontaktpunktet er da (Steiners sats):

$$\frac{1}{2}\, M\, R^2 + M\, R^2 = \frac{3}{2}\, M\, R^2$$

Momentsatsen gir oss da aktuell vinkelakselerasjon α:

$$\begin{aligned} \left(\frac{3}{2}\, M\, R^2\right)\alpha &= \tau = F\,(2\,R) \;\Downarrow \\ \alpha &= \frac{4}{3}\,\frac{F}{M}\,\frac{1}{R} \end{aligned}$$

Massesenterakselerasjonen, a_{CM}, blir da:

$$a_{\mathrm{CM}} = \alpha R = \frac{4}{3}\,\frac{F}{M}$$

(b) Det følger fra ligning (1) at:

$$\begin{aligned} f_s &= F - M\,a_{\text{CM}} \;\Downarrow \\ &= F - \frac{4}{3}\,F = -\frac{1}{3}\,F \end{aligned}$$

Friksjonskraftens størrelse er $\frac{1}{3}\,F$ og den er rettet langs $\vec{\mathbf{F}}$, dvs. motsatt av vår antakelse. (Som indikeres ved fortegnet i uttrykket for f_s ovenfor.)

(c) Massesenterbevegelsen til snellen svarer til rettlinjet bevegelse med konstant akselerasjon. Vi kan da nytte bevegelsesligning (3) fra formelarket:

$$v^2 = v_{\text{CM}}^2 = 2\,a_{\text{CM}}\,\Delta x = 2\,a_{\text{CM}}\,d \qquad \Leftrightarrow \qquad v_{\text{CM}} = \sqrt{2\,a_{\text{CM}}\,d}$$

eller:

$$v_{\text{CM}} = \sqrt{\frac{8}{3}\,\frac{F\,d}{M}}$$

Her kunne en også nyttet arbeid kinetisk energi teoremet for massesenterbevegelsen (translasjonsbevegelsen). Samlet ytre kraft er $F + (1/3)\,F$, snordraget + friksjonskraft. Det følger at:

$$\Delta K = \frac{1}{2}\,M\,v_{\text{CM}}^2 = \frac{4}{3}\,F\,d$$

som igjen gir:

$$v_{\text{CM}} = \sqrt{\frac{8}{3}\,\frac{F\,d}{M}}$$