FYS100 Fysikk

Eksamen 04.12.12 - Løsningsforslag.

OPPGAVE 1.

(a) (i) Bestemmelse av den lineære funksjonen $a_x(t)$ kombinert med antiderivasjon:

$$
\begin{aligned}
a_x(t) &= 12.0\,\mathrm{m/s^2} + \frac{-4.00\,\mathrm{m/s^2} - 12.0\,\mathrm{m/s^2}}{8.00\,\mathrm{s}}\,(t + 2.00\,\mathrm{s}) \\
&= 12.0\,\mathrm{m/s^2} - (2.00\,\mathrm{m/s^3})\,(t + 2.00\,\mathrm{s}) \\
&= 8.00\,\mathrm{m/s^2} - (2.00\,\mathrm{m/s^3})\,t
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} &= a_x(t) \;\Downarrow \\
\int_{v_{xi}}^{v_{xf}} \mathrm{d}v_x &= \int_{t_i}^{t_f} a_x(t)\,\mathrm{d}t \;\Downarrow \\
v_{xf} - v_{xi} &= (8.00\,\mathrm{m/s^2})\,t\,\Big|_{t_i}^{t_f} - (1.00\,\mathrm{m/s^3})\,t^2\,\Big|_{t_i}^{t_f}
\end{aligned}
$$

Med $v_{xi} = 7.00\,\mathrm{m/s}$, $t_i = -2.00\,\mathrm{s}$ og $t_f = 6.00\,\mathrm{s}$ følger det:

$$v_{xf} = 7.00\,\mathrm{m/s} + 64.0\,\mathrm{m/s} - 32.0\,\mathrm{m/s} = 39.0\,\mathrm{m/s}$$

(ii) Ved direkte figurinspeksjon. Δv_x svarer til arealet under den gitte grafen: Sammensatt av to trapes:

$$
\begin{aligned}
\Delta v_x &= \frac{1}{2}\cdot(6.00\,\mathrm{s})\cdot(12.0\,\mathrm{m/s^2}) - \frac{1}{2}\cdot(2.00\,\mathrm{s})\cdot(4.00\,\mathrm{m/s^2}) \\
&= 36.0\,\mathrm{m/s} - 4.00\,\mathrm{m/s} = 32.0\,\mathrm{m/s}
\end{aligned}
$$

Slik at:

$$v_{xf} = 7.00\,\mathrm{m/s} + 32.0\,\mathrm{m/s} = 39.0\,\mathrm{m/s}$$

(b) Bruker arbeid-kinetisk energiteoremet på formen:

$$\Delta K = W = \int_{x_i}^{x_f} F_x(x)\,\mathrm{d}x = m\int_{x_i}^{x_f} a_x(x)\,\mathrm{d}x$$

Siden partikkelen er i ro i begynnelsespunktet, $v_{xi} = 0\,\mathrm{m/s}$ for $x_i = 0\,\mathrm{m}$, følger det at:

$$\frac{1}{2}\,m\,v_{xf}^2 = m\int_0^{x_f} a_x(x)\,\mathrm{d}x$$

eller:

$$v_{xf}^2 = 2 \int_0^{x_f} a_x(x)\,\mathrm{d}x$$

Ved figurbetraktning finner vi:

$$\begin{aligned} v_{xf}^2 &= 2\left[\frac{1}{2}\cdot(8.00\,\mathrm{m})\cdot(6.00\,\mathrm{m/s^2}) - \frac{1}{2}\cdot(6.00\,\mathrm{m})\cdot(6.00\,\mathrm{m/s^2})\right] \\ &= 12.0\,\mathrm{m^2/s^2} \end{aligned}$$

Og den søkte partikkelfarten blir:

$$|v_{xf}| = 3.46\,\mathrm{m/s}$$

OPPGAVE 2.

(a) Tar utgangspunkt i definisjonsligningen:

$$M\,y_{\mathrm{CM}} = \sum_{k=1}^{N} m_k\,y_k$$

M er systemets samlede masse. N er antall "partikler", $N = 3$. y_k svarer til massesenterposisjonen til hver enkelt stang. $k = 1, \ldots, 3$. Hver stang reduseres følgelig til en punktpartikkel. Det følger at:

$$M = m + 3\,m + m = 5\,m$$

Og videre at:

$$\begin{aligned} (5\,m)\,y_{\mathrm{CM}} &= m\left(-\frac{L}{2}\right) + (3\,m)\cdot 0 + m\left(-\frac{L}{2}\right) \Downarrow \\ (5\,m)\,y_{\mathrm{CM}} &= -m\,L \end{aligned}$$

Og vi finner uttrykket for massesenterkoordinaten y_{CM}:

$$y_{\mathrm{CM}} = -\frac{1}{5}\,L$$

(b) Aktuelt treghetsmoment, I, uttrykkes som summen av treghetsmomentene til ring og kvadrat:

$$I = I^{(\mathrm{ring})} + I^{(\mathrm{kvadrat})}$$

Bidraget fra ringen bestemmes ved bruk av Steiners sats:

$$I^{(\text{ring})} = \frac{1}{2}\, m\, R^2 + m\, R^2 = \frac{3}{2}\, m\, R^2$$

Bidraget fra de horisontale stengene til kvadratets treghetsmoment, fra vedlagte tabell:

$$I^{(\text{kvadrat,h})} = 2\,\frac{1}{3}\, m\, R^2 = \frac{2}{3}\, m\, R^2$$

Bare den av de to vertikale stengene som ikke er sammenfallende med rotasjonsaksen, bidrar til det aktuelle treghetsmomentet. Steiners sats gir:

$$I^{(\text{kvadrat,v})} = m\, R^2$$

Samlet for kvadratet:

$$I^{(\text{kvadrat})} = \frac{2}{3}\, m\, R^2 + m\, R^2 = \frac{5}{3}\, m\, R^2$$

Og følgelig:

$$I = \frac{3}{2}\, m\, R^2 + \frac{5}{3}\, m\, R^2 = \frac{19}{6}\, m\, R^2$$

Alternativt for kvadratet samlet:

$$I_{\text{CM}}^{(\text{kvadrat})} = 2\, m\, \left(\frac{R}{2}\right)^2 + 2 \cdot \frac{1}{12}\, m\, R^2 = \frac{2}{3}\, m\, R^2$$

Steiners sats tar nå formen:

$$I^{(\text{kvadrat})} == \frac{2}{3}\, m\, R^2 + (4\, m)\, \left(\frac{R}{2}\right)^2 = \frac{5}{3}\, m\, R^2$$

Dvs. samme resultat som før.

OPPGAVE 3.

(a) I det øyeblikket diskosen frigjøres er samlet akselerasjon, $\vec{\mathbf{a}}$, gitt ved vektorsummen av normal-akselerasjon og tangensiell-akselerasjon. Disse to vektorene står vinkelrett på hverandre. Størrelsen av normal-akselerasjonen omtales som sentripetal-akselerasjonen, a_c:

$$a_c = \omega^2\, r$$

Størrelsen på den tangensielle akselerasjonen, a_t, er gitt ved vinkelakselerasjonen:

$$a_t = \alpha\, r$$

Den aktuelle vinkelakselerasjonen er gitt fra bevegelsesligning (1) for rotasjon om en fast akse:

$$\alpha = \frac{\omega_f}{\Delta t}$$

Siden vi søker størrelsen på samlet akselerasjon i tidspunktet for utkastet, følger det at:

$$a = \sqrt{a_c^2 + a_t^2} = \sqrt{(\omega_f^2\, r)^2 + (\alpha\, r)^2} = r\,\omega_f\,\sqrt{\omega_f^2 + \frac{1}{\Delta t^2}}$$

Aktuell tallverdi blir:

$$a = (0.810\,\mathrm{m}) \cdot (15.0\,\mathrm{s}^{-1}) \cdot \sqrt{(15.0\,\mathrm{s}^{-1})^2 + \frac{1}{(0.270\,\mathrm{s})^2}} = 188\,\mathrm{m/s}^2$$

(b) Aktuelt arbeid er gitt ved:

$$W = \tau_P\,\Delta\theta = I_P\,\alpha\,\Delta\theta$$

Der vi har nyttet momentsatsen. τ_P og I_P er kraftmoment og treghetsmoment om aksen gjennom punktet P. Videre fra bevegelsesligning (3) for rotasjon om en fast akse følger det at:

$$\omega_f^2 = 2\,\alpha\,\Delta\theta$$

Arbeidet kan altså uttrykkes ved:

$$W = \frac{1}{2}\,I_p\,\omega_f^2$$

Dette uttrykket kunne en ha skrevet opp direkte da det representerer arbeid-kinetisk energiteoremet for en rotasjonsbevegelse. Aktuelt treghetsmoment er:

$$\begin{aligned} I_P &= 2\,(2\,M)\,a^2 + M\,(b^2 - a^2)\ \Downarrow \\ &= 3\,M\,a^2 + M\,b^2 = M\,(3\,a^2 + b^2) \end{aligned}$$

Aktuell tallverdi:

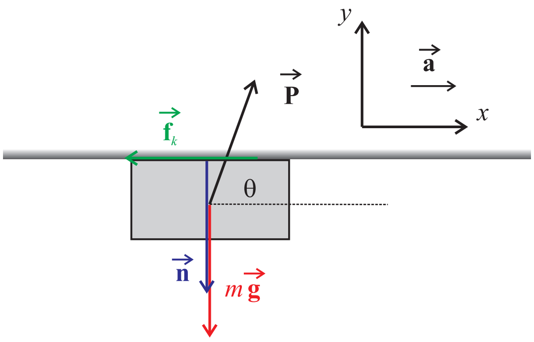
$$I_P = (0.400\,\mathrm{kg}) \cdot [\,3 \cdot (0.300\,\mathrm{m})^2 + (0.500\,\mathrm{m})^2\,] = 0.208\,\mathrm{kgm}^2$$

Og følgelig finner vi verdien på det aktuelle arbeidet:

$$W = \frac{1}{2} \cdot (0.208\,\mathrm{kgm}^2) \cdot (5.00\,\mathrm{s}^{-1})^2 = 2.60\,\mathrm{J}$$

OPPGAVE 4.

(a) Frilegemediagram:



Setter opp Newtons 2. lov:

$$
\begin{aligned}
x - \text{retning} &: & P\,\cos\theta - f_k &= m\,a \\
y - \text{retning} &: & P\,\sin\theta - n - m\,g &= 0
\end{aligned}
$$

Aktuell modell for kinetisk friksjonskraft:

$$f_k = \mu_k\, n$$

Det følger at:

$$
\begin{aligned}
n &= P\,\sin\theta - m\,g \;\Downarrow \\
f_k &= \mu_k\,(P\,\sin\theta - m\,g)
\end{aligned}
$$

Innsatt i Newtons 2. lov for x-retningen, finner vi:

$$P\,\cos\theta - \mu_k\,(P\,\sin\theta - m\,g) = m\,a$$

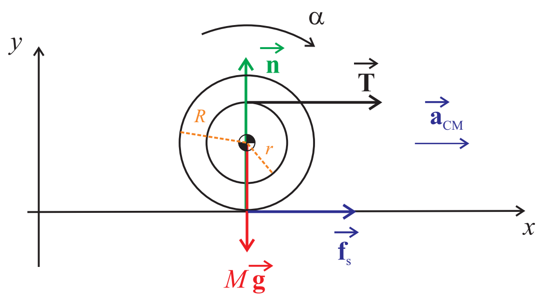
eller:

$$a = \frac{P}{m}\,(\cos\theta - \mu_k\,\sin\theta) + \mu_k\,g$$

Med de aktuelle tallverdier:

$$
\begin{aligned}
a &= \left(\frac{95.0\,\mathrm{N}}{5.00\,\mathrm{kg}}\right) \cdot (\cos 70.0^\circ - 0.400 \cdot \sin 70.0^\circ) + 0.400 \cdot (9.80\,\mathrm{m/s^2}) \\
&= 3.28\,\mathrm{m/s^2}
\end{aligned}
$$

(b) Frilegemediagram (friksjonskraftens retning “antatt” mot høyre):



Newtons 2. lov for massesenterbevegelsen:

$$T + f_s = M\,a_{\mathrm{CM}}$$

Momentsatsen for rotasjonsbevegelsen:

$$T\,r - f_s\,R = \left(\frac{1}{2}\,M\,R^2\right)\,\alpha$$

Rullebetingelsen for sylinderen:

$$a_{\mathrm{CM}} = \alpha\,R$$

Ligningen for rotasjonsbevegelsen kan da omformes til:

$$T\,\frac{r}{R} - f_s = \frac{1}{2}\,M\,a_{\mathrm{CM}}$$

Adderer vi de to bevegelsesligningene, finner vi:

$$T\,\left(1 + \frac{r}{R}\right) = \frac{3}{2}\,M\,a_{\mathrm{CM}}$$

slik at massesenter-akselerasjonen kan uttrykkes ved:

$$a_{\mathrm{CM}} = \frac{2\,T}{3\,M}\,\left(1 + \frac{r}{R}\right)$$

Aktuell tallverdi:

$$a_{\mathrm{CM}} = \frac{2\cdot(12.0\,\mathrm{N})}{3\cdot(10.0\,\mathrm{kg})}\left(1 + \frac{0.0600\,\mathrm{m}}{0.100\,\mathrm{m}}\right) = 1.28\,\mathrm{m/s^2}$$

Alternativt kan en nytte momentsatsen om berøringspunktet mellom sylinder og underlag. Friksjonskraft, normalkraft og tyngdekraft vil ikke bidra til netto krafrmoment pga. null arm. Sylinderens treghetsmoment om berøringspunktet bestemmes fra Steiners setning:

$$I = \frac{1}{2}\, M\, R^2 + M\, R^2 = \frac{3}{2}\, M\, R^2$$

Momentsatsen er uttrykt:

$$\frac{3}{2}\, M\, R^2\, \alpha = T\, (R + r)$$

Som gir for vinkelakselerasjonen:

$$\alpha = \frac{2\,T}{3\,M}\, \frac{R + r}{R^2}$$

Betingelsen for ren rullebevegelse gir oss samme resultat som før:

$$a_{\text{CM}} = \alpha\, R = \frac{2\,T}{3\,M}\, \left(1 + \frac{r}{R}\right)$$

OPPGAVE 5.

(a) Deler bevegelsen av ballen i tre faser: Første fritt fall-bevegelse (A), støtet med gulvet (B) og avsluttende fritt-fall bevegelse (C).

(A) Nytter bevegelsesligning (3) for rettlinjet bevegelse. Aktuell y-akse er orientert loddrett oppover.

$$(v_{yf}^{(\text{A})})^2 = -2\, g\, \Delta y^{(\text{A})} = 2\, g\, h^{(\text{A})}$$

Symbolet $h^{(\text{A})}$ angir høyden over bakken der ballen slippes.

(B) Støtet med gulvet. Nytter her impuls-bevegelsesmengde teoremet.

$$v_{yf}^{(\text{B})} = v_{yi}^{(\text{B})} + \frac{I_y^{(\text{B})}}{m}$$

Her er $v_{yi}^{(\text{B})} = v_{yf}^{(\text{A})}$, merk at $v_{yf}^{(\text{A})} < 0\,\text{m/s}$. $I_y^{(\text{B})}$ er den aktuelle impulsen som ballen erfarer i støtet med bakken. Fra figuren følger det at:

$$I_y^{(\text{B})} = \frac{1}{2}\, F_{\text{max}}\, \Delta t = \frac{1}{2} \cdot (300\,\text{N}) \cdot (8.00 \times 10^{-3}\,\text{s}) = 1.20\,\text{Ns}$$

(C) Nytter igjen bevegelsesligning (3) for rettlinjet bevegelse.

$$0 = (v_{yi}^{(C)})^2 - 2\,g\,\Delta y^{(C)} = (v_{yi}^{(C)})^2 - 2\,g\,h^{(C)}$$

Her er $v_{yi}^{(C)} = v_{yf}^{(B)}$ og $h^{(C)}$ representerer den maksimale høyden over bakken som ballen spretter opp.

Det følger at:

$$\begin{aligned} 2\,g\,h^{(C)} &= (v_{yi}^{(C)})^2 \Downarrow \\ &= \left(v_{yi}^{(B)} + \frac{I_y^{(B)}}{m} \right)^2 \Downarrow \\ &= \left(-\sqrt{2\,g\,h^{(A)}} + \frac{I_y^{(B)}}{m} \right)^2 \end{aligned}$$

Endelig uttrykk blir:

$$h^{(C)} = \left(-\sqrt{h^{(A)}} + \frac{I_y^{(B)}}{m\sqrt{2\,g}} \right)^2$$

Aktuell tallverdi:

$$h^{(C)} = \left(-\sqrt{2.00\,\mathrm{m}} + \frac{1.20\,\mathrm{Ns}}{(0.100\,\mathrm{kg}) \cdot \sqrt{2 \cdot (9.80\,\mathrm{m/s^2})}} \right)^2 = 1.68\,\mathrm{m}$$

(b) Bruker at spinnet for systemet skive+leirball er bevart i kollisjonen:

$$\begin{aligned} L_{zf} &= L_{zi} \Downarrow \\ I_O\,\omega_f &= m\,(\vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{v}}_i) \cdot \hat{k} \end{aligned}$$

Her er I_O systemets treghetsmoment om rotasjonsaksen etter kollisjonen. $\vec{\mathbf{r}}$ og $\vec{\mathbf{v}}_i$ er leirballens posisjons- og hastighetsvektor før kollisjonen. ω_f er aktuell vinkelfart etter kollisjonen. Nå er:

$$\begin{aligned} \vec{\mathbf{r}} &= (x\,\hat{\imath} + R\,\hat{\jmath}) \\ \vec{\mathbf{v}}_i &= -v\,\hat{\imath} \end{aligned}$$

slik at:

$$\vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{v}}_i = v\,R\,\hat{k}$$

v er leirballens fart før kollisjonen med skiven. R er skivens radius. Det følger at:

$$I_O\,\omega_f = m\,v\,R$$

Aktuelt uttrykk for treghetsmomentet I_O er:

$$I_O = \frac{1}{2} M R^2 + m R^2 = \left(\frac{M}{2} + m\right) R^2$$

Spinnbevaring gir:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{M}{2} + m\right) R^2 \omega_f &= m v R \Downarrow \\
\omega_f &= \frac{m}{m + \frac{M}{2}} \frac{v}{R} \Downarrow \\
\omega_f &= \frac{2}{1 + \frac{M}{2m}} \frac{v}{D}
\end{aligned}$$

Der D er skivens diameter. Aktuell tallverdi blir:

$$\omega_f = \frac{2}{1 + \dfrac{2.00\,\mathrm{kg}}{0.100\,\mathrm{kg}}} \cdot \frac{10.0\,\mathrm{m/s}}{0.300\,\mathrm{m}} = 3.17\,\mathrm{rad/s}$$

OPPGAVE 6.

(a) Bruker arbeid-kinetisk energi teoremet. Maksimal sammentrykking av fjæren, Δy, svarer til at heisen momentant er i ro. Vi har da at:

$$\Delta U_g + \Delta U_s = W_f$$

Der W_f er arbeidet utført av friksjonskraften. Der følger at:

$$-m\, g\, (d + \Delta y) + \frac{1}{2} k\, \Delta y^2 = -f_k\, (d + \Delta y)$$

Vi finner altså at Δy er bestemt av 2. grads ligningen:

$$\frac{1}{2} k\, \Delta y^2 - (m\, g - f_k)\, \Delta y - (m\, g - f_k)\, d = 0$$

Aktuell løsning er:

$$\Delta y = \frac{(m\, g - f_k) + \sqrt{(m\, g - f_k)^2 + 2\, k\, (m\, g - f_k)\, d}}{k}$$

Nå er $(m\, g - f_k) = 13.24 \times 10^3\,\mathrm{N}$, så vi finner som tallsvar:

$$\Delta y = \frac{(13.24 \times 10^3\,\mathrm{N}) + \sqrt{(13.24 \times 10^3\,\mathrm{N})^2 + 2 \cdot (1.50 \times 10^5\,\mathrm{N/m}) \cdot (13.24 \times 10^3\,\mathrm{N}) \cdot (3.70\,\mathrm{m})}}{1.50 \times 10^5\,\mathrm{N/m}} \Downarrow$$

$$\Delta y = 0.901\,\mathrm{m}$$

(b) Benytter bevaring av mekanisk energi, $K + U_g$. Lar ω_R og ω_r svare til vinkelfarten for kuleskallet og trinsen, respektivt. Siden snoren ikke glipper på de to roterende elementene, vil:

$$\omega_R = \frac{v_{\text{CM}}}{R} \quad \text{og} \quad \omega_r = \frac{v_{\text{CM}}}{r}$$

v_{CM} er blokkens massesenterfart. Fra tabell 10.2 følger det at kuleskallets treghetsmoment er $\frac{2}{3}\,M\,R^2$. Vi har:

$$\left[\left(\frac{1}{3}\,M\,R^2\,\omega_R^2 + \frac{1}{2}\,I\,\omega_r^2 + \frac{1}{2}\,m\,v_{\text{CM}}^2\right) - 0\right] + m\,g\,\left(y_{\text{CM},f} - y_{\text{CM},i}\right) = 0$$

Og følgelig:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\,M + \frac{I}{r^2} + m\right)\,v_{\text{CM}}^2 = m\,g\,\left(y_{\text{CM},i} - y_{\text{CM},f}\right)$$

$y_{\text{CM},i} - y_{\text{CM},f}$ svarer til aktuell fallhøyde, h. Vi finner:

$$v_{\text{CM}}^2 = \frac{2\,g\,h}{1 + \dfrac{2\,M}{3\,m} + \dfrac{I}{m\,r^2}}$$

eller:

$$v_{\text{CM}} = \sqrt{\frac{2\,g\,h}{1 + \dfrac{2\,M}{3\,m} + \dfrac{I}{m\,r^2}}}$$

Aktuell tallverdi:

$$v_{\text{CM}} = \sqrt{\frac{2 \cdot (9.80\,\text{m/s}^2) \cdot (0.820\,\text{m})}{1 + \dfrac{9.00\,\text{kg}}{1.80\,\text{kg}} + \dfrac{3.00 \times 10^{-3}\,\text{kgm}^2}{(0.600\,\text{kg}) \cdot (0.0500\,\text{m})^2}}} = 1.42\,\text{m/s}$$