FYS100 Fysikk

Eksamen 16.02.13 - Løsningsforslag.

OPPGAVE 1.

Sentripetalakselerasjonen a_c er gitt ved størrelsen av normalakselerasjonen $|\overrightarrow{\mathbf{a}}_n|$:

$$a_c = |\overrightarrow{\mathbf{a}}_n| = |\overrightarrow{\mathbf{a}}| \cos 36.9^\circ = (20.0\,\mathrm{m/s^2}) \cdot 0.800 = 16.0\,\mathrm{m/s^2}$$

Fra sammenhengen:

$$a_c = \frac{v^2}{r}$$

følger det at banefarten v er gitt ved:

$$v = \sqrt{a_c\, r} = \sqrt{(16.0\,\mathrm{m/s^2}) \cdot (4.00\,\mathrm{m})} = 8.00\,\mathrm{m/s}$$

Størrelsen av den tangensielle akselerasjonen er gitt ved:

$$a_t = |\overrightarrow{\mathbf{a}}| \sin 36.9^\circ = (20.0\,\mathrm{m/s^2}) \cdot 0.600 = 12.0\,\mathrm{m/s^2}$$

OPPGAVE 2.

Vi nytter her følgende formel, gyldig for en konstant kraft:

$$W = \overrightarrow{\mathbf{F}} \cdot \Delta \overrightarrow{\mathbf{r}}$$

Nå er:

$$\begin{aligned}
\Delta \overrightarrow{\mathbf{r}} &= \overrightarrow{\mathbf{r}}_f - \overrightarrow{\mathbf{r}}_i \;\Downarrow \\
&= -(5.00\,\mathrm{m})\,\hat{\imath} + (4.00\,\mathrm{m})\,\hat{\jmath} - [\,(3.00\,\mathrm{m})\,\hat{\imath} - (2.00\,\mathrm{m})\,\hat{\jmath}\,] \\
&= -(8.00\,\mathrm{m})\,\hat{\imath} + (6.00\,\mathrm{m})\,\hat{\jmath}
\end{aligned}$$

Det følger at:

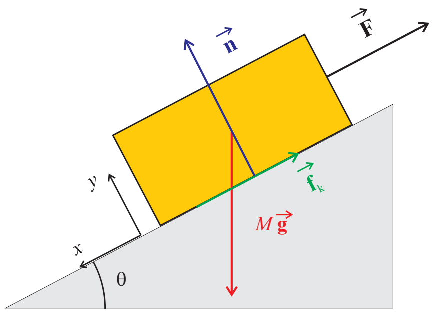
$$\begin{aligned}
W &= \overrightarrow{\mathbf{F}} \cdot \Delta \overrightarrow{\mathbf{r}} \;\Downarrow \\
&= F_x\,\Delta x + F_y\,\Delta y \;\Downarrow \\
&= (3.00\,\mathrm{N}) \cdot (-8.00\,\mathrm{m}) + (7.00\,\mathrm{N}) \cdot (6.00\,\mathrm{m}) \\
&= 18.0\,\mathrm{J}
\end{aligned}$$

For gjennomsnittlig effekt:

$$\overline{P} = \frac{W}{\Delta t} = \frac{18.0\,\mathrm{J}}{4.00\,\mathrm{s}} = 4.50\,\mathrm{W}$$

OPPGAVE 3.

Siden de to kassene beveger seg samlet, kan vi se bort fra kontaktkreftene mellom dem (indre krefter i sysetemet) og modellere systemet som et objekt med masse $M = m_1 + m_2 = 80.0\,\mathrm{kg}$.



Figur 1: Aktuelt frilegemediagram.

Siden bevegelsen langs skråplanet (i x-retningen) skjer med konstant hastighet, er akselerasjonen i denne retningen null. Newtons andre lov, uttrykt for de to koordinatretningene, blir da:

$$x-\text{retning}: M\,g\,\sin\theta - f_k - F = 0 \qquad (A)$$
$$y-\text{retning}: -M\,g\,\cos\theta + n = 0 \qquad (B)$$

I tillegg har vi modell-ligningen for kinetisk friksjonskraft:

$$f_k = \mu_k\,n = \mu_k\,M\,g\,\cos\theta$$

Det følger at størrelsen av den ytre kraften, F, er gitt ved:

$$F = M\,g\,(\sin\theta - \mu_k\,\cos\theta)$$

Fra figuren ser vi at:

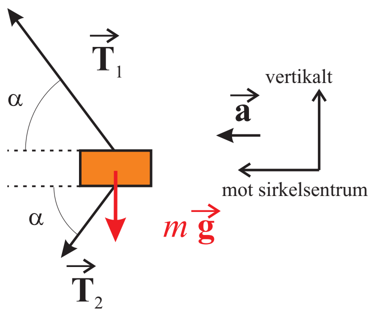
$$\tan\theta = \frac{2.50\,\mathrm{m}}{4.75\,\mathrm{m}} = 0.5263 \qquad \Rightarrow \qquad \theta = 27.76^\circ$$

Vi finner da tallverdien:

$$\begin{aligned} F &= (80.0\,\mathrm{kg}) \cdot (9.80\,\mathrm{m/s^2}) \cdot (0.4657 - 0.444 \cdot 0.8849) \\ F &= (80.0\,\mathrm{kg}) \cdot (9.80\,\mathrm{m/s^2}) \cdot 0.07284 \\ F &= 57.1\,\mathrm{N} \end{aligned}$$

OPPGAVE 4.

Frilegemediagrammet er gjengitt i figur 2.



Figur 2:

Newtons 2. lov i vertikal retning gir oss:

$$(T_1 - T_2)\,\sin\alpha - m\,g = 0$$

Newtons 2. lov anvendt inn mot sirkelsentrum gir oss (fra figuren i oppgaveteksten følger det at sirkelradius, r, er gitt ved $r = l\,\cos\alpha$):

$$(T_1 + T_2)\,\cos\alpha = m\,\omega^2\,r = m\,\omega^2\,l\,\cos\alpha$$

Vi har følgelig at:

$$\begin{aligned} T_1 - T_2 &= \frac{m\,g}{\sin\alpha} = m\,g\,\frac{l}{h} \\ T_1 + T_2 &= m\,\omega^2\,l \end{aligned}$$

Adderer sammen de to ligningene og finner:

$$2\,T_1 = m\,\omega^2\,l + m\,g\,\frac{l}{h}$$

Som løst ut for ω^2 gir:

$$\omega^2 = \frac{2\,T_1}{m\,l} - \frac{g}{h}$$

Aktuell tallverdi er:

$$\omega^2 = \frac{2\cdot(80.0\,\mathrm{N})}{(4.00\,\mathrm{kg}\cdot(1.25\,\mathrm{m})} - \frac{9.80\,\mathrm{m/s^2}}{1.00\,\mathrm{m}} = 22.2\,\mathrm{s^{-2}}$$

Slik at aktuell vinkelfart blir:

$$\omega = 4.71\,\mathrm{s^{-1}}$$

OPPGAVE 5.

Akuelle bevegelsesligninger er ($x_i = 0$ grunnet valg av plassering av koordinatsystemet):

$$\begin{aligned} x_f &= v_{xi}\, t \\ y_f &= y_i + v_{yi}\, t - \frac{1}{2}\, g\, t^2 \end{aligned}$$

Aktuelle begynnelsesbetingelser:

$$\begin{aligned} y_i &= 14.0\,\mathrm{m} \\ v_{xi} &= (7.00\,\mathrm{m/s}) \cdot \cos(-40.0^\circ) = 5.362\,\mathrm{m/s} \\ v_{yi} &= (7.00\,\mathrm{m/s}) \cdot \sin(-40.0^\circ) = -4.500\,\mathrm{m/s} \end{aligned}$$

Bevegelsesligningene omformes til baneligningen:

$$y_f = y_i + \frac{v_{yi}}{v_{xi}}\, x_f - \frac{g}{2\, v_{xi}^2}\, x_f^2$$

Vi søker altså x_f for $y_f = 0$. Verdien er bestemt av 2 . gradsligningen:

$$\frac{g}{2\, v_{xi}^2}\, x_f^2 - \frac{v_{yi}}{v_{xi}}\, x_f - y_i = 0$$

Aktuell løsning er:

$$\begin{aligned} x_f &= \frac{\dfrac{v_{yi}}{v_{xi}} \pm \sqrt{\left(\dfrac{v_{yi}}{v_{xi}}\right)^2 + \dfrac{2\, g\, y_i}{v_{xi}^2}}}{\dfrac{g}{v_{xi}^2}} \\ &= \frac{v_{xi}}{g} \left(v_{yi} + \sqrt{v_{yi}^2 + 2\, g\, y_i} \right) \end{aligned}$$

Da det bare er +-tegnet foran $\sqrt{}$ som gir en fysisk akseptabel løsning.
Aktuell tallverdi er:

$$x_f = \frac{(5.362\,\mathrm{m/s})}{(9.80\,\mathrm{m/s^2})} \left[-(4.500\,\mathrm{m/s}) + \sqrt{(4.500\,\mathrm{m/s})^2 + 2 \cdot (9.80\,\mathrm{m/s^2}) \cdot (14.0\,\mathrm{m})} \right]$$

$$x_f = 6.93\,\mathrm{m}$$

OPPGAVE 6.

(a) Partiklene har følgende hastigheter etter kollisjonen:

$$\begin{aligned} v_{1f} &= \frac{0.300\,\mathrm{kg} - 0.500\,\mathrm{kg}}{0.300\,\mathrm{kg} + 0.500\,\mathrm{kg}}\, v_{1i} = -\frac{1}{4}\, v_{1i} = -\frac{1}{4} \cdot (2.00\,\mathrm{m/s}) = -0.500\,\mathrm{m/s} \\ v_{2f} &= \frac{2 \cdot (0.300\,\mathrm{kg})}{0.300\,\mathrm{kg} + 0.500\,\mathrm{kg}}\, v_{1i} = \frac{3}{4}\, v_{1i} = \frac{3}{4} \cdot (2.00\,\mathrm{m/s}) = 1.50\,\mathrm{m/s} \end{aligned}$$

Etter kollisjonene har vi rettlinjet bevegelse med konstant hastighet. Tidspunktet når partikkle 2 treffer veggen er $t = t_0$: Det følger at:

$$v_{2f}\, t_0 = x_w \quad \Leftrightarrow \quad t_0 = \frac{x_w}{v_{2f}} = \frac{0.900\,\mathrm{m}}{1.50\,\mathrm{m/s}} = 0.600\,\mathrm{s}$$

(b) Regnet fra tidspunktet $t = 0$ finner vi partikkel1 i posisjonen:

$$x_{1f} = v_{1f}\, t$$

Tilsvarende vil posisjonen til partikkel 2 være
(ligningen gyldig for $t \geq t_0$, etterat bevegelsesretningen har snudd):

$$x_{2f} = x_w - v_{2f}\,(t - t_0) = -v_{2f}\, t + 2\, x_w$$

Ved tidspunktet $t = t_1$ er partiklene i samme posisjon x_f. Under disse betingelsene elimineres tiden mellom ligningene ovenfor:

$$\frac{x_f}{v_{1f}} = \frac{x_f - 2\, x_w}{-v_{2f}}$$

Som løst for posisjonen x_f gir:

$$x_f = \left(\frac{v_{1f}}{v_{1f} + v_{2f}} \right) (2\, x_w) \rightarrow -x_w = -0.900\,\mathrm{m}$$

OPPGAVE 7.

Bevaring av bevegelsesmengde gir:

$$\begin{aligned} m_{\mathrm{L}}\, v_{\mathrm{L}} + m_{\mathrm{R}}\, v_{\mathrm{R}} &= 0 \ \Downarrow \\ v_{\mathrm{R}} &= -\frac{m_{\mathrm{L}}}{m_{\mathrm{R}}}\, v_{\mathrm{L}} \end{aligned}$$

Hastighetene målt fra en observatør i origo, O, i aktuelt inertialsystem. Markerer dette ved å skrive:

$$v_{\mathrm{RO}} = -\frac{m_{\mathrm{L}}}{m_{\mathrm{R}}}\, v_{\mathrm{LO}}$$

Dersom hastigheten til blokk L sett fra R, v_{LR}, er gitt, må vi nytte Galilei-transformasjonen:

$$v_{\mathrm{LO}} = v_{\mathrm{LR}} + v_{\mathrm{RO}}$$

Vi har da at:

$$\begin{aligned} v_{\mathrm{RO}} &= -\frac{m_{\mathrm{L}}}{m_{\mathrm{R}}}\, (v_{\mathrm{LR}} + v_{\mathrm{RO}}) \ \Downarrow \\ (m_{\mathrm{L}} + m_{\mathrm{R}})\, v_{\mathrm{RO}} &= -m_{\mathrm{L}}\, v_{\mathrm{LR}} \ \Downarrow \\ v_{\mathrm{RO}} &= -\frac{m_{\mathrm{L}}}{m_{\mathrm{L}} + m_{\mathrm{R}}}\, v_{\mathrm{LR}} \end{aligned}$$

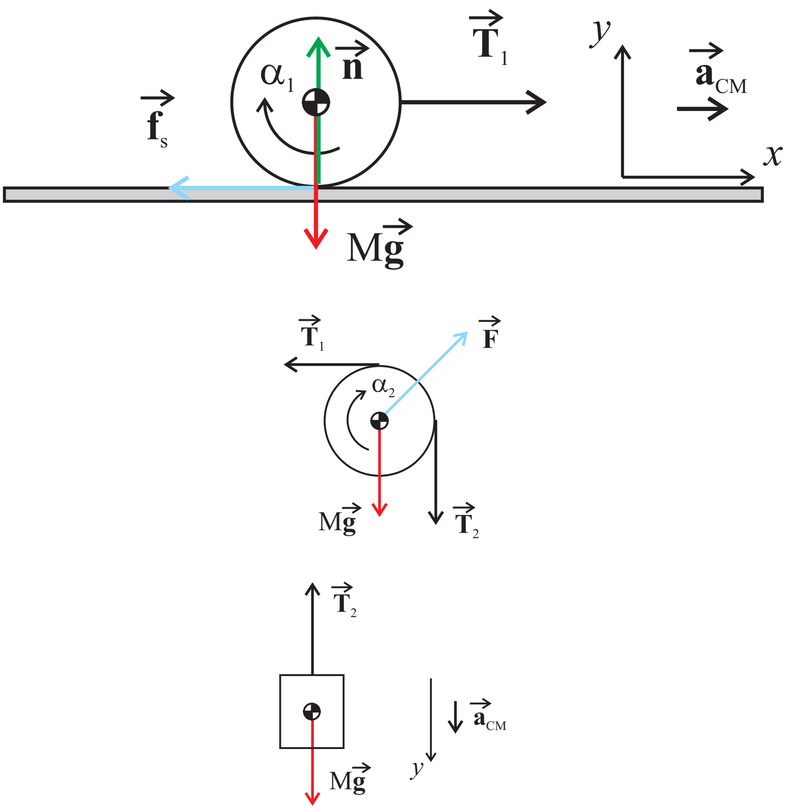
Forskyvning:

$$\Delta x_{\mathrm{R}} = v_{\mathrm{RO}}\, \Delta t$$

Aktuell tallverdi ("Hvor langt" svarer til absoluttverdien av posisjonsendringen):

$$|\Delta x_{\mathrm{R}}| = \frac{1.00\,\mathrm{kg}}{1.50\,\mathrm{kg}} \cdot (1.20\,\mathrm{m/s}) \cdot (0.800\,\mathrm{s}) = 0.640\,\mathrm{m}$$

OPPGAVE 8.



Figur 3: Frilegemediagram.

Newtons 2. lov for sylinderens massesenterbevegelse:

$$T_1 - f_s = M\, a_{\text{CM}}$$

Momentsatsen for sylinderens rotasjonsbevegelse:

$$\begin{aligned}
f_s\,(2\,R) &= \frac{1}{2}\,M\,(2\,R)^2\,\alpha_1 \;\Downarrow \\
f_s &= \frac{1}{2}\,M\,(2\,R)\,\frac{a_{\text{CM}}}{2\,R} \;\Downarrow \\
f_s &= \frac{1}{2}\,M\,a_{\text{CM}}
\end{aligned}$$

Der vi har nyttet rullebetingelsen $a_{\text{CM}} = \alpha_1(2\,R)$.

Momentsatsen for trinsens rotasjonsbevegelse:

$$\begin{aligned}
(T_2 - T_1)\, R &= \frac{1}{2}\, M\, R^2\, \alpha_2 \ \Downarrow \\
T_2 - T_1 &= \frac{1}{2}\, M\, R\, \frac{a_{\mathrm{CM}}}{R} \ \Downarrow \\
T_2 - T_1 &= \frac{1}{2}\, M\, a_{\mathrm{CM}}
\end{aligned}$$

Der vi har nyttet at den tangensielle akselerasjonen til et punkt på trinsens ytre omkrets må svare til massesenterakselerasjonen (trinsen følger tauet som følger masse-bevegelsen).
Newtons 2. lov for kassen:

$$M\, g - T_2 = M\, a_{\mathrm{CM}}$$

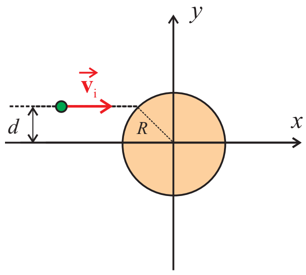
Vi kan nå summere opp våre fire ligninger og dermed eliminere snordragene T_1 og T_2 samt friksjonskraften f_s:

$$M\, g = 3\, M\, a_{\mathrm{CM}}$$

Og følgelig er den søkte akselerasjonen:

$$a_{\mathrm{CM}} = \frac{1}{3}\, g$$

OPPGAVE 9.



Figur 4: Aktuelt koordinatsystem

Oppgaven løses med spinnbevaring $\overrightarrow{\mathbf{L}}_i = \overrightarrow{\mathbf{L}}_f$:

Initielt er spinnet knyttet til leirklumpens rettlinjede bevegelse:

$$\overrightarrow{\mathbf{L}}_i = m\,(\overrightarrow{\mathbf{r}} \times \overrightarrow{\mathbf{v}}_i) = m\,[\,(x\,\hat{\imath} + d\,\hat{\jmath}) \times (v_i\,\hat{\imath}\,] = -m\,d\,v_i\,\hat{k}$$

Etter kollisjonen roterer leirklump og sylinder som et samlet legeme:

$$\overrightarrow{\mathbf{L}}_f = -I\,\omega\,\hat{k} = -\left(\frac{1}{2}\,M\,R^2 + m\,R^2\right)\,\omega\,\hat{k}$$

Det følger at:

$$\omega = \frac{m\,d\,v_i}{\frac{1}{2}\,M\,R^2 + m\,R^2} = \frac{2\,m\,d\,v_i}{(M + 2\,m)\,R^2}$$

OPPGAVE 10.

(a) Arbeid-kinetisk energiteoremet får her formen (Kraften $\vec{\mathbf{F}} = F\,\hat{\imath}$ er en konstant):

$$\Delta U_g = W = \vec{\mathbf{F}} \cdot \Delta \vec{\mathbf{r}}$$

Vi har følgelig:

$$m\,g\,H = F\,\Delta x = F\,\sqrt{L^2 - (L-H)^2} = F\,\sqrt{(2\,L - H)\,H}$$

Kvadrerer begge sidene av ligningen og finner at:

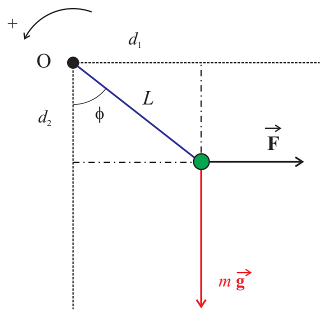
$$\begin{aligned} (m\,g)^2\,H^2 &= F^2\,(2\,L - H)\,H \;\Downarrow \\ (m\,g)^2\,H &= F^2\,(2\,L - H) \;\Downarrow \\ H &= \frac{2\,F^2\,L}{F^2 + (m\,g)^2} \;\Downarrow \\ H &= \frac{2\,L}{1 + \left(\frac{m\,g}{F}\right)^2} \end{aligned}$$

Aktuell tallverdi er:

$$H = \frac{2 \cdot (0.800\,\mathrm{m})}{1 + \left(\frac{(0.300\,\mathrm{kg}) \cdot (9.80\,\mathrm{m/s^2})}{(1.00\,\mathrm{N}}\right)^2} = 0.166\,\mathrm{m}$$

Merk at snorkraften ikke utfører noe arbeid da den står vinkelrett på bevegelsesretningen.

(b)



Kraften $\vec{\mathbf{F}}$ har armen d_2, mens tyngdekraften, $m\,\vec{\mathbf{g}}$, har armen d_1. Netto kraftmoment om O er ved likevekt null. (Snorkraften kan vi se bort fra da dens arm er null).

$$F\,d_2 - (m\,g)\,d_1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d_1}{d_2} = \frac{F}{m\,g}$$

Fra figuren ovenfor ser vi at:

$$\frac{d_1}{d_2} = \tan\phi$$

Videre er:

$$\cos\phi = \frac{d_2}{L} = \frac{L-H}{L} = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\phi}} = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\dfrac{F}{m\,g}\right)^2}}$$

Løst ut for høyden H har vi:

$$H = H_2 = L\left[1 - \frac{1}{\sqrt{1+\left(\dfrac{F}{m\,g}\right)^2}}\right]$$

Aktuell tallverdi:

$$\begin{aligned} H_2 &= (0.800\,\mathrm{m})\left\{1 - \frac{1}{\sqrt{1+\left[\dfrac{1.00\,\mathrm{N}}{(0.300\,\mathrm{kg})\cdot(9.80\,\mathrm{m/s^2})}\right]^2}}\right\} \\ &= 4.26\times 10^{-2}\,\mathrm{m} = 4.26\,\mathrm{cm} \end{aligned}$$