Bokmål

DET TEKNISK-NATURVITENSKAPLIGE FAKULTET

EKSAMEN I : ÅMA 100 Matematiske metoder 1

DATO : 13/12 – 2007.

VARIGHET : 4 timer (0900 – 1300).

TILLATTE HJELPEMIDLER :
P. T. Cappelen m/flere : Tabeller og formelsamling.
Enkel, bestemt kalkulator.

OPPGAVESETTET BESTÅR AV : 7 oppgaver på 2 sider, og et formelark.

Oppgave 1

a) Skriv det komplekse tallet

$$z = \frac{2+i}{1-i}$$

på kartesisk form $a + bi$.

I resten av oppgaven er $u = -2 + 2\sqrt{3}\,i$.

b) Skriv u på eksponentialform $re^{i\theta}$.

c) Løs ligningen $w^2 = u$, dvs finn kvadratrøttene til u. Skriv svarene på kartesisk form, og tegn dem sammen med u i det komplekse plan.

Oppgave 2

a) Bestem grenseverdien

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 9}$$

ved faktorisering.

b) Bestem grenseverdien

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2}.$$

Oppgave 3

a) Finn en partikulærløsning y_p av differensialligningen $y'' + 4y = 10e^t$.

b) Finn den entydige løsningen av initialverdiproblemet

$$y'' + 4y = 10e^t; \; y(0) = 2, y'(0) = 0.$$

c) Finn den generelle løsningen av differensialligningen

$$\frac{dy}{dx} = y^2 e^{3x}.$$

Oppgave 4 Gitt kurven med ligning

$$x^2 + 2xy + 3y^2 = 6.$$

a) Finn dy/dx ved implisitt derivasjon.

b) Punktet $P = (1, 1)$ ligger på kurven. Finn ligningen for tangentlinja til kurven i P.

c) Bestem de punkter på kurven der tangentlinja er horisontal.

Oppgave 5 Finn følgende ubestemte integraler :

$$a) \int x\sqrt{x^2+1}\, dx; \quad b) \int \frac{1}{x^2+4x+5}\, dx;$$

$$c) \int \frac{2x^2+3}{(x-1)(x^2+4)}\, dx; \quad d) \int \frac{\sin^{-1}(x)}{\sqrt{1-x^2}}\, dx.$$

Oppgave 6

a) Bestem arealet av området avgrenset av grafen til $y = -x^2 + 5$ og den horisontale linja $y = 1$.

I resten av oppgaven er D det plane området i første kvadrant som er avgrenset av grafene til $y = x^2$ og $y = 2x$, og som ligger til venstre for den vertikale linja $x = 1$.

b) Bestem volumet av omdreiningslegemet som fremkommer når D roteres rundt x - aksen.

c) Bestem volumet av omdreiningslegemet som fremkommer når D roteres rundt y - aksen.

Oppgave 7

a) I en kule vokser volumet $V = \frac{4\pi}{3}r^3$ med en rate på 50 cm^3/min. Ved et tidspunkt t_1 er radien r blitt 10 cm. Hvor fort vokser radien i kula ved dette tidspunktet?

b) En lyktestolpe er 6 m høy. Tenk deg at du er 2 m høy og går bort fra stolpen med en fart på 2 m/sek. Hvor fort vokser skyggen din?

LYKKE TIL!

H07 ÅMA 100

1

a) $$z = \frac{2+i}{1-i} = \frac{(2+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{1+3i}{\underbrace{1^2+1^2}_{2}} = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}i$$

b) $u = -2 + 2\sqrt{3}\,i$ (2. kvadrant!)

$$\boxed{r} = |u| = \sqrt{(-2)^2 + (2\sqrt{3})^2} = \sqrt{16} = \boxed{4}$$

$$\boxed{\theta} = \arg(u) = \tan^{-1}\left(\frac{2\sqrt{3}}{-2}\right) + \pi$$

$$= -\tan^{-1}(\sqrt{3}) + \pi = -\frac{\pi}{3} + \pi = \boxed{\frac{2\pi}{3}}$$

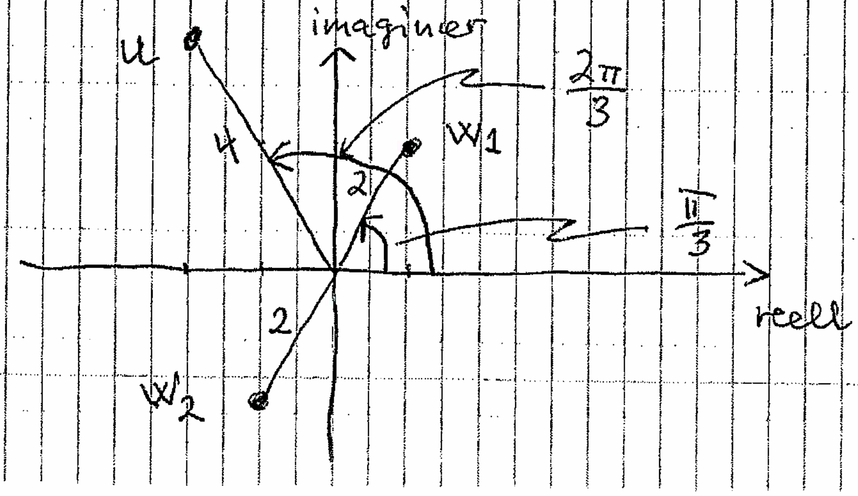
$$\Rightarrow \qquad u = re^{i\theta} = 4e^{i2\pi/3}$$

c) $$w^2 = u = 4e^{i2\pi/3} \Rightarrow$$

$$w = \pm\sqrt{r}\,e^{i\theta/2} = \pm\sqrt{4}\,e^{i\pi/3} = \pm 2e^{i\pi/3}$$

$$= \pm 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = \pm\left(1 + \sqrt{3}\,i\right);$$

dvs $\underline{w_1 = 1 + \sqrt{3}\,i}$; $\underline{w_2 = -1 - \sqrt{3}\,i}$



2

② a) $x^2 - 2x - 3 = 0$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1(-3)}}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm 4}{2} = \begin{cases} 3 = x_1 \\ -1 = x_2 \end{cases}$$

faktorisering

$\Rightarrow$ $x^2 - 2x - 3 = (x-3)(x+1)$

$\Rightarrow$

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 9} = \lim_{x \to 3} \frac{\cancel{(x-3)}(x+1)}{\cancel{(x-3)}(x+3)}$$

$$= \lim_{x \to 3} \frac{x+1}{x+3} = \frac{3+1}{3+3} = \frac{2}{3}$$

b) $$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2} = \left[\frac{0}{0}\right]$$

$$\underset{\text{l'Hopital}}{=} \lim_{x \to 0} \frac{-(-\sin x)}{6x} = \left[\frac{0}{0}\right]$$

$$\underset{\text{l'Hopital}}{=} \lim_{x \to 0} \frac{\cos(x)}{6} = \frac{\cos(0)}{6} = \frac{1}{6}$$

(3)

a) $y'' + 4y = 10e^t$

Prøver $y_p = ce^t \Rightarrow$

$y_p' = ce^t,\ y_p'' = ce^t$

$\Rightarrow\ ce^t + 4ce^t = 10e^t$

$5ce^t = 10e^t$

$5c = 10 \Rightarrow \boxed{c = 2}$

$\Rightarrow\ y_p = 2e^t$

b) (*) $y'' + 4y = 10e^t$; $y(0) = 2,\ y'(0) = 0.$

Karakteristisk likning

$r^2 + 4 = 0 \Rightarrow r = \pm\sqrt{-4} = \pm 2i$

$\Rightarrow$ generell løsning y_h av $(*)_h$:

$y_h = A\cos 2t + B\sin(2t)$

$\Rightarrow$ generell løsning av (*)

$$y = y_h + y_p = A\cos 2t + B\sin 2t + 2e^t$$

Bruker initial betingelsene :

$$y(0) = A\cos 0 + B\sin 0 + 2e^0 = 2$$

$$A + 2 = 2$$

$$\boxed{A = 0}$$

$$y'(0) = -2A\sin 2t + 2B\cos 2t + 2e^t$$

$$y'(0) = -2A\sin 0 + 2B\cos 0 + 2e^0 = 0$$

$$2B + 2 = 0$$

$$\boxed{B = -1}$$

Entydig løsning av IVP

$$y = -\sin(2t) + 2e^t$$

c)

$$\frac{dy}{dx} = y^2 e^{3x}$$

$$\frac{dy}{y^2} = e^{3x}dx$$

$$\int \frac{1}{y^2}dy = \int e^{3x}dx$$

$$-\frac{1}{y} = \frac{1}{3}e^{3x} + C_1$$

$$\frac{1}{y} = -\frac{1}{3}e^{3x} - C_1 = C$$

$$y = \frac{1}{C - \frac{1}{3}e^{3x}}, \quad C \in \mathbb{R}$$

4

$$x^2 + 2xy + 3y^2 = 6$$

a) $$2x + 2\left(1 \cdot y + x \cdot \frac{dy}{dx}\right) + 3 \cdot 2y \cdot \frac{dy}{dx} = 0$$

$$(2x + 6y)\frac{dy}{dx} = -2x - 2y$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2x - 2y}{2x + 6y} = \frac{-x - y}{x + 3y}$$

b) Tangenten i $P = (1,1)$:

$$\text{Stigningstall} = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{(1,1)} = \frac{-1-1}{1+3\cdot 1} = \boxed{-\frac{1}{2}}$$

$\Rightarrow$ tangenten har ligning

$$y-1 = \left(-\frac{1}{2}\right)(x-1)$$

$$y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$$

c) Horisontal tangent $\Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = 0$

$$\Leftrightarrow \frac{-x-y}{x+3y} = 0 \Leftrightarrow -x-y = 0$$

(og $x+3y \neq 0$)

$-x-y=0 \Leftrightarrow \boxed{y=-x}$ Sett inn i

kurvelikninga:

$$x^2+2x(-x)+3(-x)^2 = 6$$

$$x^2-2x^2+3x^2 = 6$$

$$2x^2 = 6$$

$$x = \underline{\pm\sqrt{3}} \Rightarrow$$

2 punkter med horisontal tangent:

$x = \sqrt{3} \Rightarrow y = -x = -\sqrt{3} \Rightarrow$ pkt $(\sqrt{3}, -\sqrt{3})$

$x = -\sqrt{3} \Rightarrow y = -x = \sqrt{3} \Rightarrow$ pkt $(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$

5

a) $\int x\sqrt{\underbrace{x^2+1}_{u}}\,dx = \int \sqrt{u}\,\frac{du}{2} = \frac{1}{2}\int \sqrt{u}\,du$

Sett

$u = x^2 + 1$

$\frac{du}{dx} = 2x \Rightarrow x\,dx = \frac{du}{2}$

$= \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} + C$

$= \frac{1}{3}(x^2+1)^{\frac{3}{2}} + C$

b) $\int \frac{1}{x^2+4x+5}\,dx$

$x^2 + 4x + 5 = 0$ gir komplekse røtter

$\Rightarrow$ lag fullstendig kvadrat:

$$\int \frac{1}{\underbrace{x^2+4x+5}_{\downarrow\ \underbrace{(x+2)^2+1}_{\text{Fullstendig kvadrat}}}}\,dx = \int \frac{1}{\underbrace{(x+2)}_{u}{}^2+1}\,dx = \int \frac{1}{u^2+1}\,du$$

Sett
$u = x+2$
$du = dx$

$$= \tan^{-1}(u) + C$$

$$= \underline{\underline{\tan^{-1}(x+2) + C}}$$

c) $$\frac{2x^2+3}{(x-1)\underbrace{(x^2+4)}_{\uparrow\ \text{komplekse røtter!}}} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+4}$$

Felles brøkstrek: $\Rightarrow$

$$\boxed{2x^2+3 = A(x^2+4) + (Bx+C)(x-1)} \quad (*)$$

Sett $x=1$: $\quad 2+3 = A(1+4) + (\quad)\cdot 0$

$$5 = 5A \Rightarrow$$

$$\boxed{A = 1}$$

Regn ut $(*)$:

$$2x^2+3 = Ax^2+4A+Bx^2+Cx-Bx-C$$

$$2x^2+3 = (A+B)x^2 + (C-B)x + (4A-C)$$

$=0$

$$\Rightarrow \quad A + B = 2 \Rightarrow \boxed{B} = 2 - A = 2 - 1 = \boxed{1}$$

$$C - B = 0 \Rightarrow \boxed{C} = B = \boxed{1}$$

$$(4A - C = 3, \text{ dvs } 4 \cdot 1 - 1 = 3, \text{ ok})$$

$$\Rightarrow \int \frac{2x^2 + 3}{(x-1)(x^2+4)}\,dx = \int \frac{\overset{A}{1}}{x-1}\,dx + \int \frac{\overset{B}{1} \cdot x + \overset{C}{1}}{x^2+4}\,dx$$

$$= \int \frac{1}{x-1}\,dx + \int \frac{x}{\underbrace{x^2+4}_{2^2}}\,dx + \int \frac{1}{\underbrace{x^2+4}_{2^2}}\,dx$$

standard!

$$= \ln|x-1| + \underbrace{\frac{1}{2}\ln(x^2+4) + \frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{x}{2}\right)}_{\uparrow} + C$$

fra formelark.

d) $\int \frac{\sin^{-1}(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int u\,du = \frac{1}{2}u^2 + C$

du

Sett

$u = \sin^{-1}(x)$

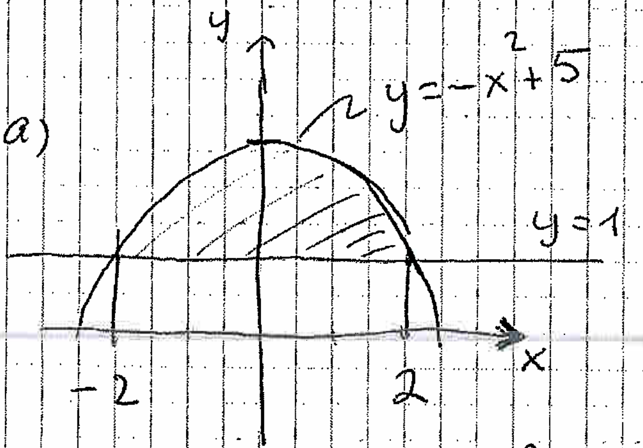
$\frac{du}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$du = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

$= \frac{1}{2}(\sin^{-1}(x))^2 + C$

6

a)



Skjæring:

$-x^2+5 = 1$

$x^2 = 4$

$\boxed{x = \pm 2}$

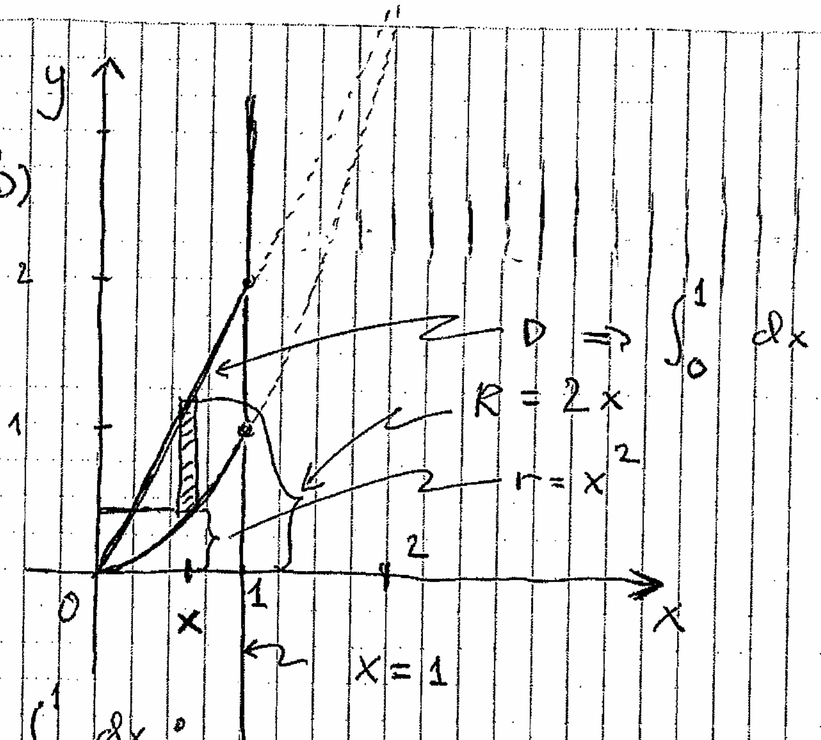
$\Rightarrow$ Areal $= \int_{-2}^{2} \underbrace{((-x^2+5)-1)}_{-x^2+4}dx$

$= \left(-\frac{1}{3}x^3+4x\right)\Big|_{-2}^{2} = -\frac{1}{3}\cdot 2^3 + 4\cdot 2 - \left(-\frac{1}{3}(-2)^3 + 4(-2)\right)$

$= -\frac{8}{3} + 8 - \frac{8}{3} + 8 = \frac{32}{3}$

11.

b)



$\int_0^1 dx$:

Rundt x-aksen : Skive-metoden :

$$V = \int_0^1 \pi(R^2 - r^2)\,dx = \pi \int_0^1 ((2x)^2 - (x^2)^2)\,dx$$

$$= \pi \int_0^1 (4x^2 - x^4)\,dx = \pi\left(\frac{4}{3}x^3 - \frac{1}{5}x^5\right)\Big|_0^1$$

$$= \pi\left(\frac{4}{3} - \frac{1}{5}\right) = \frac{17\pi}{15}$$

c) Rundt y-aksen : Sylinderskall-metoden :

$$\text{Volum} = \int_0^1 2\pi \underbrace{(\text{radius})}_{x} \underbrace{(2x - x^2)}_{\text{høyde}}\,dx$$

$$= 2\pi \int_0^1 (2x^2 - x^3)\,dx = 2\pi\left(\frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4\right)\Big|_0^1$$

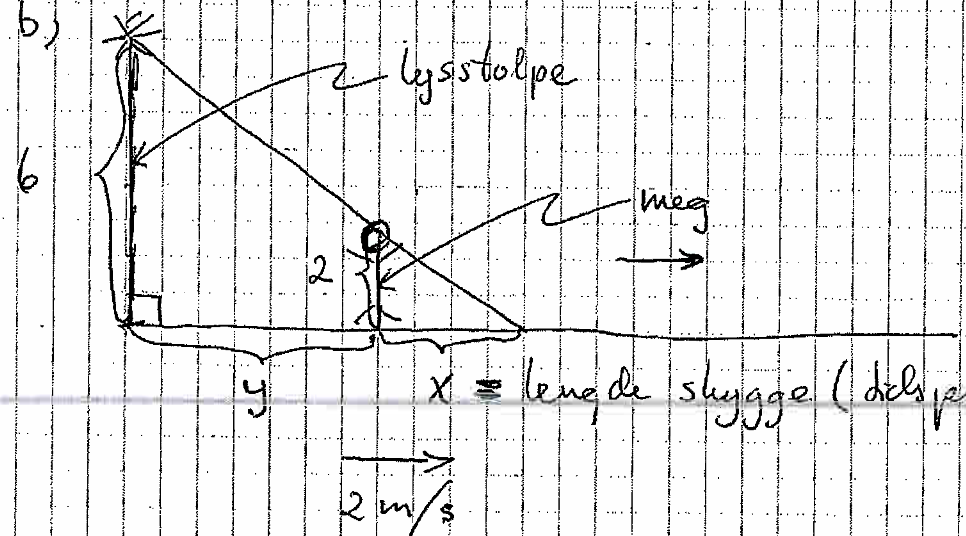
$$= 2\pi\left(\frac{2}{3} - \frac{1}{4}\right) = \frac{5\pi}{6}$$

7 a) $V = \frac{4\pi}{3} r^3$; $\frac{dr}{dt} = ?$

$$\Rightarrow \underset{\underset{50}{\uparrow}}{\frac{dV}{dt}} = \frac{4\pi}{3} 3r^2 \cdot \frac{dr}{dt} = 4\pi \underset{\underset{r=10}{\uparrow}}{r^2} \frac{dr}{dt}$$

$$\Rightarrow \frac{dr}{dt} = \frac{50}{4\pi \cdot 10^2} = \frac{1}{8\pi} \approx 0{,}0398 \text{ cm/min}$$

b)



y = avstand fra stolpen

Gitt : $\frac{dy}{dt} = 2$ m/sek ; $\boxed{\text{finn: } \frac{dx}{dt} = ?}$

Men $\frac{x}{2} = \frac{x+y}{6} \Rightarrow 3x = x+y \Rightarrow 2x = y$

Ta $\frac{d}{dt}$: $2 \cdot \frac{dx}{dt} = \underset{\underset{2}{\uparrow}}{\frac{dy}{dt}} \Rightarrow \frac{dx}{dt} = 1$ m/s

vokser skyggen med.