Nynorsk

DET TEKNISK-NATURVITSKAPLEGE FAKULTET

EKSAMEN I : ÅMA 100 Matematiske metodar 1

DATO : 26/5 – 2009.

EKSAMEN VARER : 5 timar (0900 – 1400).

TILLETNE HJELPEMIDDEL :
K. Rottmann : Matematisk formelsamling.
Enkel, bestemt kalkulator.

OPPGÅVESETTET ER PÅ : 7 oppgåver på 2 sider, og 2 sider formelark.

Oppgåve 1

a) La u vera det komplekse talet

$$u = \frac{1-i}{-3+2i}.$$

Skriv u på kartesisk form $a + bi$.

b) Finn dei tre løysingane til likninga $w^3 = -i$. Skriv løysingane på kartesisk form.

Oppgåve 2

a) Løys initialverdiproblemet

$$y'' - 4y' + 3y = 3e^{2x}, \; y(0) = y'(0) = 0.$$

b) Finn ei partikulærløysing av differensiallikninga

$$y'' + 4y = 4x^2 + 8x.$$

c) Finn den generelle løysinga av differensiallikninga

$$\frac{dy}{dx} = y^2 e^{2x}.$$

Oppgåve 3

a) Finn grenseverdien

$$\lim_{x\to\infty} \frac{(2x+1)^2}{2x^2+1}.$$

b) Finn grenseverdien

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan^{-1}(2x)}{\sin(3x)+x}.$$

Oppgåve 4

a) Gjeve kurven med likning

$$y + xy - x^3 = 4.$$

Punktet $P(0, 4)$ ligg på kurven. Finn likninga for tangenten til kurven i punktet P. (Bruk implisitt derivasjon.)

b) Gjeve funksjonen

$$f(x) = \frac{x-2}{x^2+5}$$

definert for alle $x \in \mathbf{R}$.

(i) Bruk $f'(x)$ til å finna dei intervalla der $f(x)$ er veksande og der $f(x)$ er minkande.

(ii) Finn dei lokale ekstremalpunkta til $f(x)$. Har funksjonen globale ekstremalpunkt? Grunngjev svaret.

Oppgåve 5 Finn fylgjande ubestemte integral (antideriverte) :

$$a) \int x \cos(2x)\, dx; \quad b) \int \frac{\tan^{-1}(x)}{1+x^2}\, dx;$$

$$c) \int \frac{x^2+2}{x^2(x-1)}\, dx; \quad d) \int \frac{4x+2}{x^2+2x+2}\, dx.$$

Oppgåve 6

a) Skisser fylgjande kurver i 1. kvadrant i xy - planet : Grafen til $y = 1/x^2$; dei vertikale linjene $x = 1$ og $x = 3$; den horisontale linja $y = 2$. Finn arealet til det området som blir avgrensa av desse kurvene.

b) La R vera trekanten i xy - planet avgrensa av x - aksen, linja $y = 2x$, og den vertikale linja $x = 1$. Finn volumet av omdreiningslekamen du får ved å rotera R rundt y−aksen.

Oppgåve 7

Eit rektangel har sidekantar x og y som endrar seg med tida t. På eit bestemt tidspunkt er arealet $A = 100\ \text{cm}^2$ og arealet veks med $10\ \text{cm}^2/\text{min}$, medan sidekanten x er 5 cm og avtar med 5 cm/min. Kor fort endrar sidekanten y seg ved dette tidspunktet?

LUKKE TIL!

ÅMA 100 Matematiske metoder 1 V09

1

a)

$$u = \frac{1-i}{-3+2i} = \frac{(1-i)(-3-2i)}{(-3+2i)(-3-2i)}$$

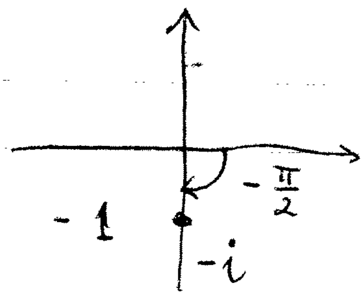
$$= \frac{-3+3i-2i+2i^2}{3^2+2^2} = \frac{-5+i}{13}$$

$i^2 = -1$

$$= -\frac{5}{13} + \frac{1}{13}i$$

b)

$$w^3 = -i, \quad w = ?$$



Klart:

$$\left.\begin{array}{l} r = |-i| = 1 \\ \theta = \mathrm{Arg}(-i) = -\frac{\pi}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$-i = e^{-i\pi/2}$$

$w^3 = e^{-i\pi/2}$ har da løsningene

$$w = \underbrace{\sqrt[3]{1}}_{1}\, e^{i\left(-\pi/6 + k\cdot\frac{2\pi}{3}\right)}, \quad k = 0, 1, 2$$

$\underline{k=0}$ gir

$$w_1 = e^{-i\pi/6} = \cos(-\pi/6) + i\sin(-\pi/6)$$

$$= \underline{\underline{\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i}}$$

$k = 1$ gir

$$w_2 = e^{i\overbrace{\left(-\pi/6 + 2\pi/3\right)}^{\pi/2}} = \cos(\pi/2) + i\sin(\pi/2)$$

$$= 0 + i\cdot 1 = \underline{\underline{i}}$$

$k=2$ gir

$$w_3 = e^{i\left(-\pi/6 + 2\cdot\frac{2\pi}{3}\right)} = \cos\left(\frac{7\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right)$$

$$= \underline{\underline{-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i}}$$

2

$$(*) \quad y'' - 4y' + 3y = 3e^{2x}, \quad y(0) = y'(0) = 0.$$

Karakteristisk likn $r^2 - 4r + 3 = 0$

$r_1 = 1, \; r_2 = 3$

$\Rightarrow$ generell løsning av $(*)_h$

$$y_h = Ae^{x} + Be^{3x}, \quad A, B \in \mathbb{R}$$

$2 \neq 1, 3$

$f(x) = 3e^{2x} \Rightarrow y_s$ har form

$$\left.\begin{aligned} y_s &= ce^{2x} \\ y_s' &= 2ce^{2x} \\ y_s'' &= 4ce^{2x} \end{aligned}\right\} \text{Sett inn i } (*)$$

$$4c\cancel{e^{2x}} - 4 \cdot 2c\cancel{e^{2x}} + 3 \cdot c\cancel{e^{2x}} = 3\cancel{e^{2x}}$$

$$4c - 8c + 3c = 3$$

$$c = \boxed{-3} \Rightarrow$$

$$y_s = -3e^{2x}$$

$\Rightarrow$ generell løysing av $(*)$

$$\boxed{y = y_h + y_s = Ae^{x} + Be^{3x} - 3e^{2x}}$$

Finna A og B:

$$0 = y(0) = \boxed{A + B - 3 = 0} \quad \mathrm{I}$$

$$y'(x) = Ae^{x} + 3Be^{3x} - 6e^{2x}$$

$$y'(0) = \boxed{A + 3B - 6 = 0} \quad \mathrm{II}$$

$$\mathrm{I} + \mathrm{II} \Rightarrow \quad A = B = \frac{3}{2} \quad \Rightarrow$$

eintydig løysing av IVP

$$\underline{\underline{y = \frac{3}{2}e^{x} + \frac{3}{2}e^{3x} - 3e^{2x}}}.$$

b)

$$y'' + 4y = 4x^2 + 8x$$

Høgre sida polynom av grad 2 $\Rightarrow$ prøver

$$\left.\begin{array}{l} y_s = ax^2 + bx + c \\ y_s' = 2ax + b, \quad y_s'' = 2a \end{array}\right\} \text{Sett inn}$$

$$2a + 4(ax^2 + bx + c) = 4x^2 + 8x$$

$$4ax^2 + 4bx + 2a + 4c = 4x^2 + 8x$$

$\Rightarrow$

$4a = 4 \Rightarrow \boxed{a = 1}$

$4b = 8 \Rightarrow \boxed{b = 2}$

$2a + 4c = 0 \Rightarrow 4c = -2a = -2 \Rightarrow \boxed{c = -\frac{1}{2}}$

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{y_s = x^2 + 2x - \frac{1}{2}}}$$

<u>Test</u> $\quad y_s' = 2x + 2, \quad y_s'' = 2$

$$2 + 4(x^2 + 2x \ \frac{1}{2}) = 4x^2 + 8x \quad \text{ok!}$$

c)

$$\frac{dy}{dx} = y^2 e^{2x}$$

$$\frac{dy}{y^2} = e^{2x} dx$$

$$\int \frac{dy}{y^2} = \int e^{2x} dx$$

$$-\frac{1}{y} = \frac{1}{2}e^{2x} + C_1$$

$$\frac{1}{y} = -\frac{1}{2}e^{2x} + C$$

$$y = \frac{1}{-\frac{1}{2}e^{2x} + C}$$

3 a)

$$\lim_{x \to \infty} \underbrace{\frac{(2x+1)^2}{2x^2+1}}_{\text{rasjonal funksjon}} = \lim_{x \to \infty} \frac{4x^2 + 4x + 1}{2x^2 + 1}$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{4x^2}{2x^2} = 2$$

b)

$$\lim_{x \to 0} \frac{\tan^{-1}(2x)}{\sin(3x) + x} = \longrightarrow$$

$$\left[\frac{0}{0}\right]_{x=0}$$

$$\lim_{x\to 0} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{l'Hopital}}}{=} \frac{\frac{1}{1+(2x)^2}\cdot 2}{3\cos(3x)+1} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{kan nå sette } x=0}}{=} \frac{\frac{2}{1}}{3\cdot 1+1} = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$$

(4)

a)

$$y + xy - x^3 = 4$$

Implisitt deriv ~~mhp~~ mhp x ($\frac{dy}{dx}$):

$$y' + 1\cdot y + x\cdot y' - 3x^2 = 0$$

$x=0,\ y=4 \Rightarrow$

$$y' + 1\cdot 4 + \cancel{0\cdot y'} - \cancel{3\cdot 0^2} = 0$$

$$y' = -4 = \left.\frac{dy}{dx}\right|_P$$

$\Rightarrow$ tangenten i $P(0,4)$

$$y - 4 = (-4)(x-0)$$

dvs

$$\underline{\underline{y = -4x + 4}}$$

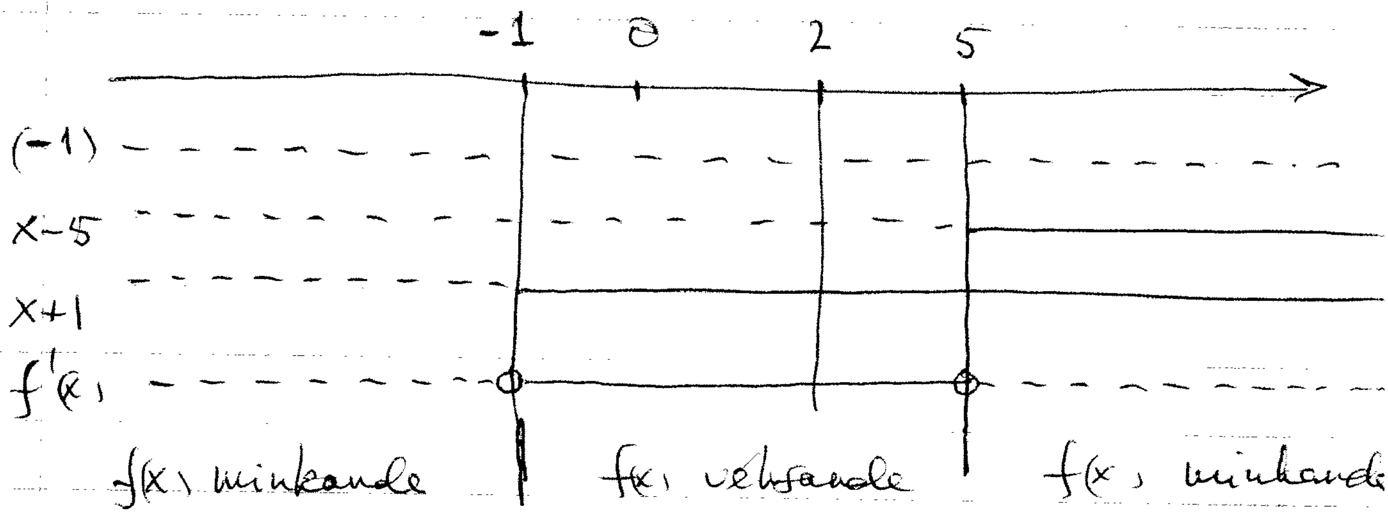
b)

$$f(x) = \frac{x-2}{x^2+5}$$

$$f'(x) = \frac{1 \cdot (x^2+5) - (x-2)\,2x}{(x^2+5)^2}$$

$$= \frac{-(x^2-4x-5)}{(x^2+5)^2} = \frac{-(x-5)(x+1)}{(x^2+5)^2} \quad (x^2+5)^2 > 0$$

$x^2-4x-5=0 \Rightarrow x = 5, -1$



$f(x)$ minkande for $x \in (-\infty, -1]$ og $[5, \infty)$;

$f(x)$ veksande for $x \in [-1, 5]$.

c) $f'(x) = 0 \iff x = -1$ og $x = 5$

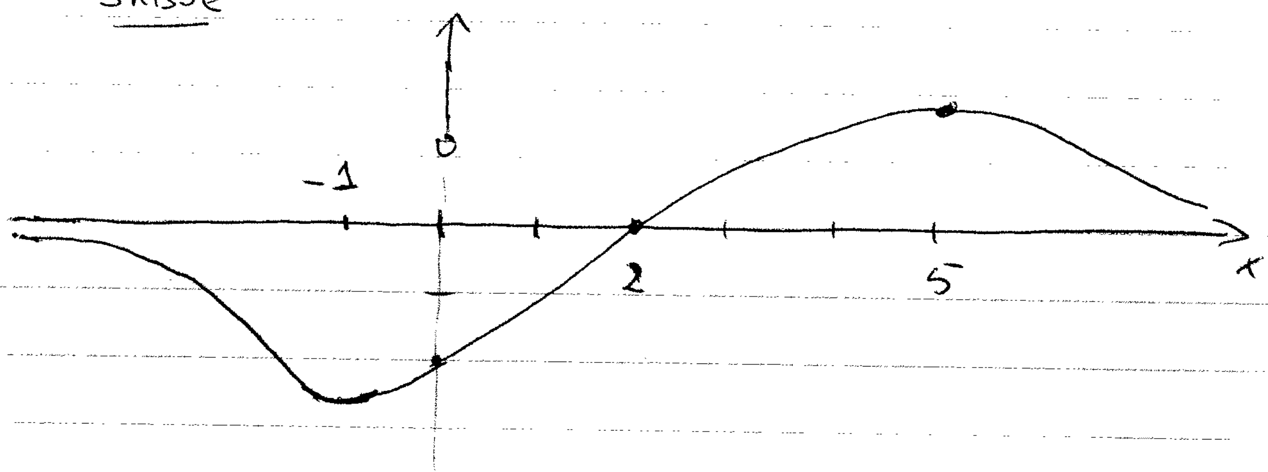
$x = -1 \Rightarrow f'(x)$ skifter fortegn $- \to + \Rightarrow$

$\underline{x = -1}$ = lokalt minimumspkt

$x = 5 \Rightarrow f'(x)$ skifter fortegn $+ \rightarrow - \Rightarrow$

$x = 5$ = lokalt maxpkt for $f(x)$

Skisse



$x=5$ er opplagt globalt maxpkt på $[2, \infty]$, og siden $f(x)$ jo er ≤ 0 på $(-\infty, 2)$ $\Rightarrow$

$x = 5$ = globalt maxpkt på $\mathbb{R}$

Tilsvarende

$x = -1$ er opplagt globalt minpkt på $(-\infty, 2)$, og siden $f(x)$ jo er > 0 på $(2, \infty) \Rightarrow$

$x = -1$ er globalt minpkt på $\mathbb{R}$

5

a) $\int x\cos(2x)\,dx = x\cdot\frac{1}{2}\sin(2x) - \int 1\cdot\frac{1}{2}\sin(2x)\,dx$

$\downarrow \int$

$\frac{1}{2}\sin(2x)$

$= \frac{1}{2}x\sin(2x) - \frac{1}{2}\int\sin(2x)\,dx$

$= \frac{1}{2}x\sin(2x) - \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\cos(2x)\right) + C$

$= \frac{1}{2}x\sin(2x) + \frac{1}{4}\cos(2x) + C$

(delvis integrasjon)

b) $\int \frac{\tan^{-1}(x)}{1+x^2}\,dx = \int u\,du = \frac{1}{2}u^2 + C$

$= \frac{1}{2}\left[\tan^{-1}(x)\right]^2 + C$

$\left.\begin{aligned} u &= \tan^{-1}(x) \\ du &= \frac{1}{1+x^2}\,dx \end{aligned}\right\} \nearrow$

(substitusjon)

c) $\frac{x^2+2}{\underbrace{x^2(x-1)}_{x\cdot x\cdot(x-1)}} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x-1}$, (delbrøksoppsp.)

$= \frac{Ax(x-1) + B(x-1) + Cx^2}{x^2(x-1)}$

$x^2 + 2 = (A+C)x^2 + (B-A)x - B \implies$

$\Rightarrow$

$$A + C = 1 \Rightarrow \boxed{C} = 1 - A = 1 + 2 = \boxed{3}$$

$$B - A = 0 \Rightarrow \boxed{A} = B = \boxed{-2}$$

$$-B = 2 \Rightarrow \boxed{B = -2}$$

$\Rightarrow$

$$\frac{x^2+2}{x^2(x-1)} = -\frac{2}{x} - \frac{2}{x^2} + \frac{3}{x-1}$$

$$\Rightarrow \int \frac{x^2+2}{x^2(x-1)}\,dx = -2\int \frac{1}{x}\,dx - 2\int \frac{1}{x^2}\,dx + 3\int \frac{1}{x-1}\,dx$$

$$= -2\ln|x| + \frac{2}{x} + 3\ln|x-1| + C$$

d) $$\int \frac{4x+2}{x^2+2x+2}\,dx = \int \frac{4x+2}{(x+1)^2+1}\,dx$$

Kompletere røtter $\Rightarrow$

$x^2 + 2x + 2 =$

$(x^2 + 2x + 1) + 1 =$

$\boxed{(x+1)^2 + 1}$

Sett $u = x + 1$, $du = dx$, $x = u - 1$

$4u - 2$

$$= \int \frac{4(u-1)+2}{u^2+1}\,du$$

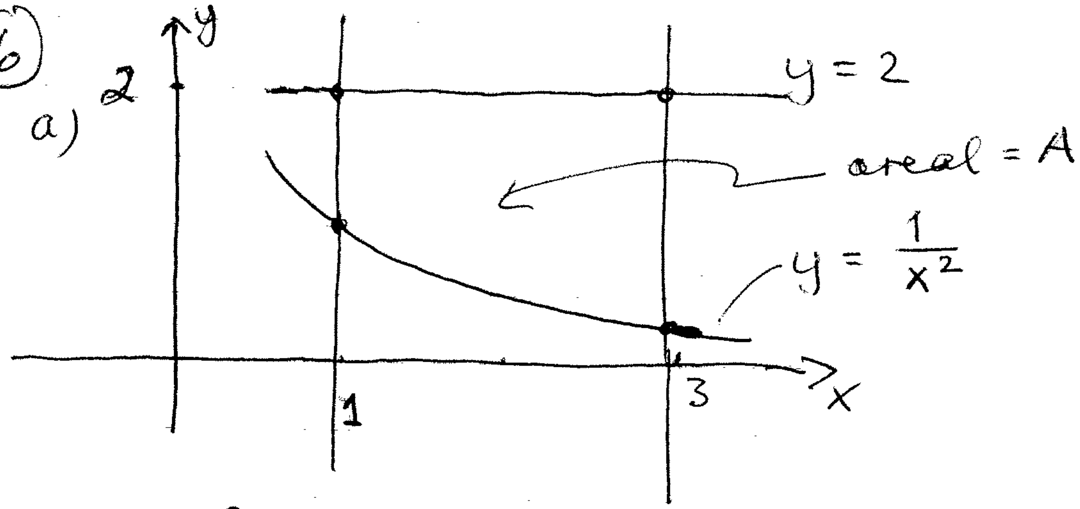
$$= 4\int \frac{u}{u^2+1}\,du - 2\int \frac{1}{u^2+1}\,du$$

$$= 4 \cdot \frac{1}{2}\ln(u^2+1) - 2 \cdot \tan^{-1}(u) + C$$

$$= 2\ln(x^2+2x+2) - 2\tan^{-1}(x+1) + C$$

6

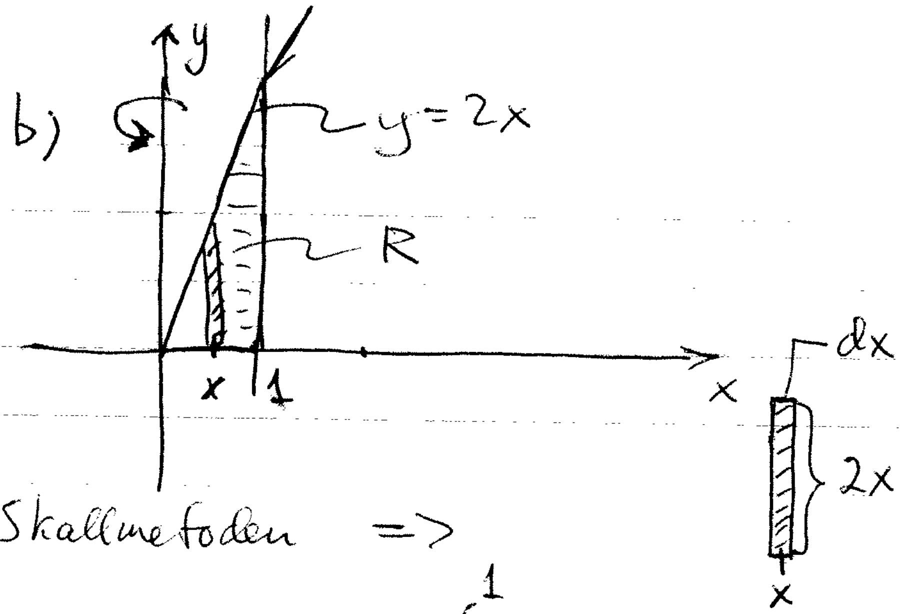
a)



$$A = \int_1^3 \left(2 - \frac{1}{x^2}\right) dx = 2x + \frac{1}{x}\Big|_1^3$$

$$= 2\cdot 3 + \frac{1}{3} - \left(2\cdot 1 + \frac{1}{1}\right) = \underline{\underline{\frac{10}{3}}}$$

b)

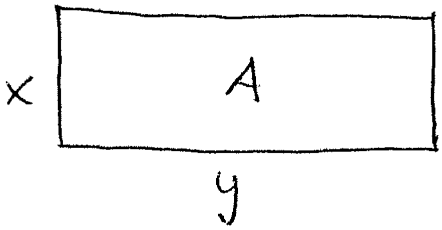


Skallmetoden =>

$$\text{Volum} = \int_0^1 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{radius}}}{2\pi x} \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ \text{høyde}}}{\underbrace{2x}} \, dx$$

$$= 4\pi \int_0^1 x^2 dx = 4\pi \cdot \frac{1}{3} x^3 \Big|_0^1 = \underline{\underline{\frac{4\pi}{3}}} \text{ !}$$

(7)



$$A = x(t) \cdot y(t) \quad \Rightarrow$$

$$\frac{dA}{dt} = \frac{dx}{dt} \cdot y + x \cdot \frac{dy}{dt}$$

Oppgitt: $\quad 10 \qquad -5 \qquad 20 \qquad 5 \qquad ?$

$$A = 100 = 5 \cdot y \quad \Rightarrow \quad y = 20$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{10 + 5 \cdot 20}{5} \text{ cm/min} = 22 \text{ cm/min}$$

Så kanten y vokser med 22 cm/min ved dette tidspunkt.