Bokmål

Universitetet i Stavanger

DET TEKNISK-NATURVITENSKAPLIGE FAKULTET

EKSAMEN I : ÅMA 100 Matematiske metoder 1

DATO : 10/12 - 2010.

EKSAMEN VARER : 5 timer (0900 - 1400).

TILLATTE HJELPEMIDLER :
K. Rottmann : Matematisk formelsamling.
Enkel, bestemt kalkulator.

OPPGAVESETTET BESTÅR AV : 7 oppgaver på 2 sider, og 2 sider formelark.

Oppgave 1

a) Regn ut følgende komplekse tall u, og skriv svaret på kartesisk form:

$$u = \frac{1-2i}{2+i} + (1+i)^2.$$

b) La $z = -\sqrt{3}/2 + (1/2)i$. Tegn z i det komplekse planet, og finn z^{100}. Skriv svaret på kartesisk form. Vis utregningene.

c) Løs ligningen $w^4 = -16$. (Hint : $-16 = 16e^{i\pi}$.) Skriv løsningene på *eksponentiell* form og tegn dem i det komplekse planet.

Oppgave 2

a) Løs initialverdiproblemet $y' = 2xy^2$; $y(1) = 1$.

b) Bruk integrerende faktor for å finne generell løsning av differensialligningen

$$y' + 2y = e^x.$$

c) Løs initialverdiproblemet

$$y'' + y' - 2y = -2x^2 + 1; \quad y(0) = 0, \; y'(0) = 0.$$

d) Finn generell løsning av differensialligningen

$$y'' + 2y' + 5y = 10\cos(x) + 10\sin(x).$$

Oppgave 3

a) Bestem grenseverdien

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos(x)}{3x^2}.$$

b) En kule har radius 10 cm. Bruk lineær approksimasjon for å anslå hvor mye radien må økes for at volumet av kula skal øke med 100 cm^3. (For volum av kule, se Rottmann side 34.)

Oppgave 4

a) Gitt kurven med ligning $x^2 - 4x + y^2 + 2y = 20$.

   (i) Bruk implisitt derivasjon for å finne dy/dx og dx/dy.

   (ii) Punktet $P(5, 3)$ ligger på kurven. Finn ligningen for tangenten til kurven i P.

   (iii) Finn de punktene på kurven der tangentlinja er horisontal (parallell med $x-$aksen).

b) Gitt funksjonen $f(x) = x^2(x-1)^2$ definert for $x \in \mathbf{R}$. Bestem alle lokale maksimums- og minimumspunkter for $f(x)$.

Oppgave 5

Finn følgende integral (utregning må vises):

$$a) \int x\cos(x^2)\,dx; \quad b) \int xe^{2x}\,dx;$$

$$c) \int \frac{x^3 + 2x^2 + 9}{x^2(x^2+9)}\,dx; \quad d) \int e^{\sqrt{x}}\,dx\,.$$

Oppgave 6

I en rett sylinder varierer radien r (cm) og høyden h (cm) med tiden t (min), men på en slik måte at volumet av sylinderen holder seg konstant. På et bestemt tidspunkt t_1 er $r = 4$ cm, $h = 5$ cm og r vokser med 4 cm/min. Hvor fort endrer den totale overflaten av sylinderen seg ved tidspunktet t_1? (Total overflate = bunn + topp + sideflate; se Rottmann side 33.)

Oppgave 7

a) Området A i 1. kvadrant er avgrenset av $y-$aksen, grafen til $f(x) = 2 - x^2$ og linja $g(x) = x$. Finn arealet av A.

b) La D være området avgrenset av grafen til $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = 1/x$, samt de vertikale linjene $x = 2$ og $x = 3$. Bestem volumet av omdreiningslegemet som oppstår når D roteres om $y-$aksen.

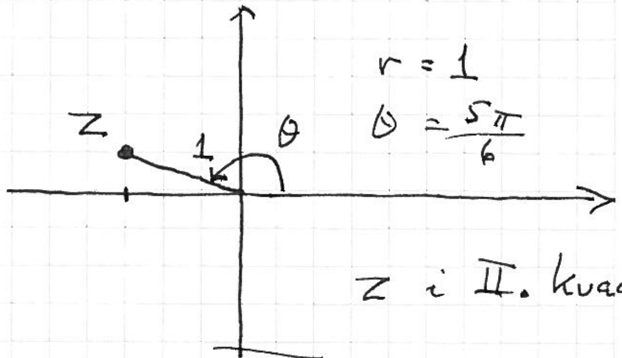
LYKKE TIL!

1

a) $$\frac{1-2i}{2+i} + (1+i)^2 = \frac{(1-2i)(2-i)}{(2+i)(2-i)} + 1 + 2i + i^2$$

$$= \frac{2-4i-i+2i^2}{2^2+1^2} + 2i = \frac{-5i}{5} + 2i = -i + 2i = \underline{\underline{i}}$$

b) $$z = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$$



$r = 1$

$\theta = \frac{5\pi}{6}$

$$\boxed{r} = |z| = \sqrt{\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \boxed{1}$$

$$\boxed{\theta} = \arg(z) = \tan^{-1}\left(\frac{1/2}{-\sqrt{3}/2}\right) + \pi$$

z i II. kvadr.

$$= \tan^{-1}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \pi = -\frac{\pi}{6} + \pi = \boxed{\frac{5\pi}{6}}$$

$$\Rightarrow \quad z = e^{i5\pi/6}$$

$$\Rightarrow \quad z^{100} = e^{i500\pi/6} \overset{*}{=} e^{-i2\pi/3} =$$

$$= \cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right) = \underline{\underline{-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i}}$$

*

$$\left[\frac{500\pi}{6} = \frac{500}{12}\cdot 2\pi = \left(41 + \frac{8}{12}\right)2\pi \sim 41\cdot 2\pi + \frac{4\pi}{3} \sim -\frac{2\pi}{3}\right]$$

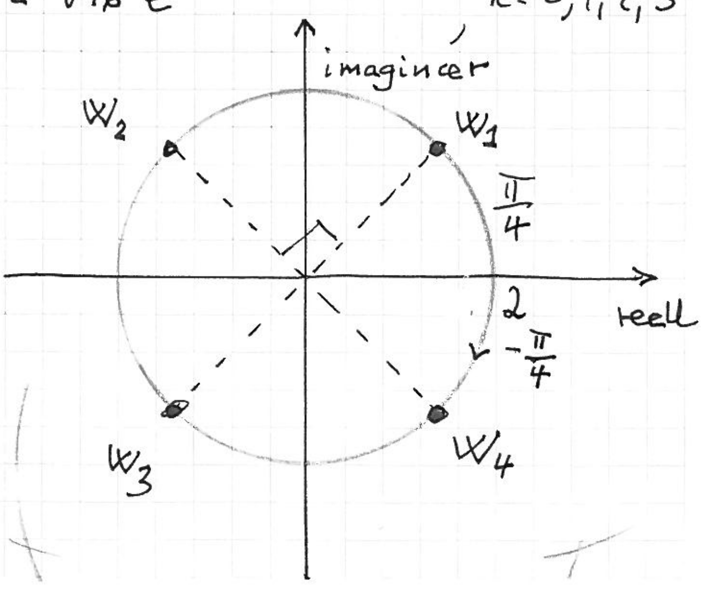
c) $$w^4 = 16e^{i\pi} \Rightarrow w = \sqrt[4]{16}\, e^{i\left(\pi/4 + k\cdot\frac{2\pi}{4}\right)} \quad k = 0, 1, 2, 3$$

$k=0: \quad w_1 = \underline{2e^{i\pi/4}}$

$k=1: \quad w_2 = \underline{2e^{i3\pi/4}}$

$k=2: \quad w_3 = 2e^{i5\pi/4} = \underline{2e^{-i3\pi/4}}$

$k=3: \quad w_4 = 2e^{i7\pi/4} = \underline{\underline{2e^{-i\pi/4}}}$



(2)

a) $y' = 2xy^2; \quad y(1) = 1.$

$$\frac{dy}{dx} = 2xy^2$$

$$\frac{dy}{y^2} = 2x\,dx$$

$$\int \frac{dy}{y^2} = \int 2x\,dx$$

$$-\frac{1}{y} = x^2 + C$$

$y(1) = 1 \Rightarrow \quad -\frac{1}{1} = 1^2 + C \quad \Rightarrow \underline{C = -2}$

$$-\frac{1}{y} = x^2 - C$$

$$\underline{\underline{y = \frac{1}{2 - x^2}}}$$

b) $y' + 2y = e^x$

Integrerende faktor: $2 \rightarrow \int 2\,dx = 2x \rightarrow \boxed{e^{2x}}$

$\Rightarrow$

$$(y' + 2y) \cdot e^{2x} = e^x \cdot e^{2x} = e^{3x}$$

$$(y \cdot e^{2x})' = e^{3x}$$

$$y \cdot e^{2x} = \int e^{3x}\,dx = \frac{1}{3}e^{3x} + C$$

$$\underline{\underline{y = \frac{1}{3}e^x + Ce^{-2x}}}$$

c) $\begin{cases} y'' + y' - 2y = -2x^2 + 1 \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases}$

• y_h : Karakteristisk ligning :

$$r^2 + r - 2 = 0 \longrightarrow r_1 = 1, \ r_2 = -2$$

$$\Rightarrow \quad y_h = Ce^{x} + De^{-2x}$$

• y_s : $\left.\begin{array}{l} y_s = Ax^2 + Bx + C \\ y_s' = 2Ax + B, \ y_s'' = 2A \end{array}\right\} \Longrightarrow$

$$2A + 2Ax - 2(Ax^2 + Bx + C) = -2x^2 + 1$$

ordne : $-2Ax^2 + (2A - 2B)x + 2A + B - 2C = -2x^2 + 1$

$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} -2A = -2 \\ 2A - 2B = 0 \\ 2A + B - 2C = 1 \end{array}\right\}$ $\boxed{A = 1}$ $\boxed{B = 1}$ $\boxed{C = 1}$ $\Longrightarrow$

$$y_s = x^2 + x + 1$$

Generell løsning

$$y = y_h + y_s = Ce^{x} + De^{-2x} + x^2 + x + 1$$

• $C, D = ?$

$$y(0) = C + D + 1 = 0$$

$$y' = Ce^{x} - 2De^{-2x} + 2x + 1$$

$$y'(0) = C - 2D + 1 = 0$$

$\Longrightarrow$ $\boxed{C = -1}$ $\boxed{D = 0}$

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{y = -e^{x} + x^2 + x + 1}}$$

d) $y'' + 2y' + 5y = 10\cos x + 10\sin x$

Generell løsning = ?

- y_h:

$$r^2 + 2r + 5 = 0 \implies r = -1 \pm 2i$$

$$\implies \quad y_h = e^{-x}\left(C\cos(2x) + D\sin(2x)\right)$$

- y_s:

$$y_s = A\cos x + B\sin x$$
$$y_s' = -A\sin x + B\cos x$$
$$y_s'' = -A\cos x - B\sin(x) \qquad \underline{\text{Merk}}: y_s'' = -y_s$$

$$\implies \underbrace{y_s''}_{-y_s} + 2y_s' + 5y_s = 2y_s' + 4y_s$$

$$= 2(-A\sin(x) + B\cos(x)) + 4(A\cos x + B\sin x)$$

$$= (4A + 2B)\cos(x) + (-2A + 4B)\sin x = 10\cos(x) + 10\sin x$$

$$\implies \left.\begin{array}{l} 4A + 2B = 10 \\ -2A + 4B = 10 \end{array}\right\} \implies \boxed{A = 1}\ \boxed{B = 3}$$

$\implies$

$$\underline{\underline{y = e^{-x}\left(C\cos 2x + D\sin(2x)\right) + \cos(x) + 3\sin(x)}}$$

3

a) $\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos(x)}{3x^2} \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{6x} \left[\frac{0}{0}\right] =$

$\lim_{x \to 0} \frac{\cos(x)}{6} = \underline{\underline{\frac{1}{6}}}$ (l'Hopitâl to ganger)

b) V = volum kule $= V(r) = \frac{4\pi}{3} r^3$

$V'(r) = \frac{4\pi}{3} \cdot 3r^2 = 4\pi r^2$

Ta $r_0 = 10$ cm ; $\Delta V = 100$ cm^3

<u>Har</u>: $\Delta V \approx V'(r_0)\,\Delta r$

$100 \approx 4\pi \cdot 10^2 \cdot \Delta r$

$\Delta r \approx \frac{1}{4\pi}$ cm $\approx 0{,}08$ cm

<u>Svar</u>: Når radien i kula er 10 cm, må radien økes med ca. 0,08 cm for at volumet av kula skal øke 100 cm^3

(4)

a) $x^2 - 4x + y^2 + 2y = 20$

(i) $\frac{d}{dx}$: $2x - 4 + 2yy' + 2y' = 0$ $\left[y' = \frac{dy}{dx} \right]$

$$(2y+2)y' = 4 - 2x$$

$$\underline{\underline{\frac{dy}{dx}}} = y' = \frac{4-2x}{2y+2} = \underline{\underline{\frac{2-x}{y+1}}}$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{\frac{dx}{dy}}} = \underline{\underline{\frac{y+1}{2-x}}}$$

(ii) $P(5,3)$: $5^2 - 4\cdot 5 + 3^2 + 2\cdot 3 = 20$, $\underline{\text{ok}}$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_P = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{\substack{x=5\\ y=3}} = \frac{2-5}{3+1} = -\frac{3}{4}$$

$\Rightarrow$ tangenten i P :

$$y - 3 = -\frac{3}{4}(x-5)$$

$$\underline{\underline{y = -\frac{3}{4}x + \frac{27}{4}}}$$

(iii) Tangentlinja i Q (på kurven) horisontal $\Longleftrightarrow$ $\left.\frac{dy}{dx}\right|_Q = 0$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2-x}{y+1} = 0 \Longrightarrow \boxed{x = 2} \quad (\text{men } y+1 \neq 0)$$

Linn i kurve-ligningen :

$x = 2 \Rightarrow$

$$2^2 - 4 \cdot 2 + y^2 + 2y = 20$$

$$y^2 + 2y - 24 = 0 \quad \longrightarrow \quad \underline{y = 4, -6}$$

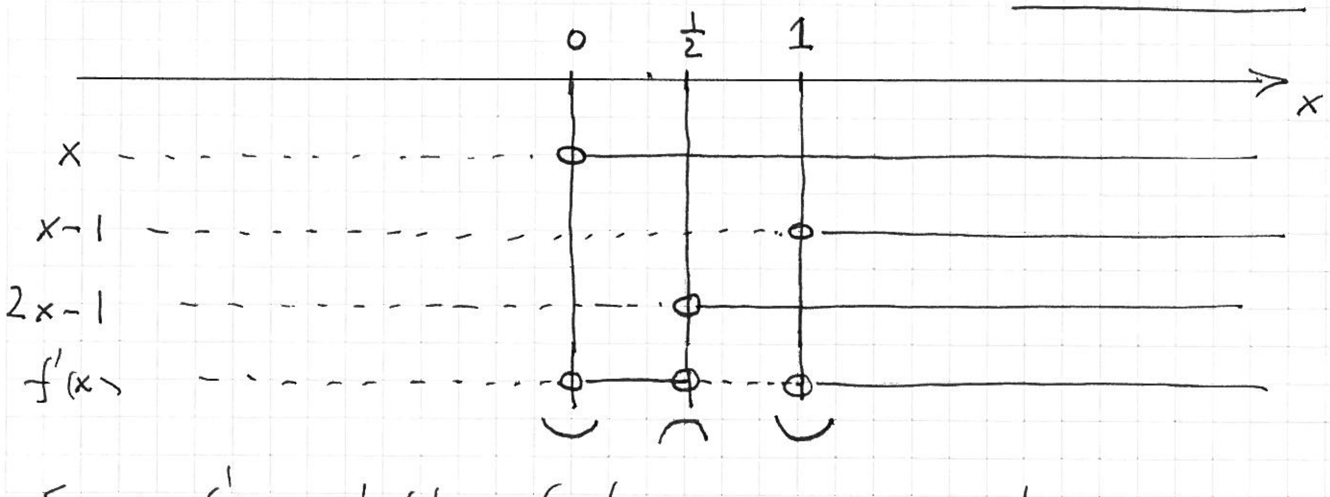
$\Rightarrow$ <u>2 punkter</u> der tangenten horisontal:

$$\underline{\underline{Q_1 = (2, 4)}} \quad \text{og} \quad \underline{\underline{Q_2 = (2, -6)}}$$

b) $f(x) = x^2 (x-1)^2, \quad x \in \mathbb{R}$

$$\underline{f'(x)} = 2x \cdot (x-1)^2 + x^2 \cdot 2(x-1) \cdot 1$$

$$= x(x-1) \cdot \left[2(x-1) + 2x \right] = \underline{x(x-1)(2x-1)}$$



<u>Ser</u>: $f'(x)$ skifter fortegn $\Leftrightarrow x = 0, \frac{1}{2}, 1$;

så $(x \in \mathbb{R})$:

- $f(x)$ har lokalt min pkt $\Leftrightarrow x = 0$ og $x = 1$
- $f(x)$ har lokalt max pkt $\Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$

$$\underline{\underline{}}$$

⑦

5

a) $\int x\cos(x^2)\,dx = \int \cancel{x}\cos(u)\cdot\frac{du}{2\cancel{x}} =$

$u = x^2$

$\frac{du}{dx} = 2x$

$dx = \frac{du}{2x}$

$\frac{1}{2}\int \cos(u)\,du = \frac{1}{2}\sin(u) + C$

$= \underline{\underline{\frac{1}{2}\sin(x^2) + C}}$

b) $\int \underset{u}{x}\,\underset{v'}{e^{2x}}\,dx = x\cdot\frac{1}{2}e^{2x} - \int 1\cdot\frac{1}{2}e^{2x}\,dx$

$v = \frac{1}{2}e^{2x}$

$= \frac{1}{2}xe^{2x} - \frac{1}{2}\int e^{2x}\,dx$

$= \underline{\underline{\frac{1}{2}xe^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x} + C}}$

c) $\frac{x^3+2x^2+9}{x^2(x^2+9)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{Cx+D}{x^2+9}$

$\Rightarrow$

$x^3+2x^2+9 = Ax(x^2+9) + B(x^2+9) + (Cx+D)x^2$

$x^3+2x^2+9 = (A+C)x^3 + (B+D)x^2 + 9Ax + 9B$

$$\left.\begin{aligned} A+C &= 1 \\ B+D &= 2 \\ 9A &= 0 \\ 9B &= 9 \end{aligned}\right\}\quad A=0,\ B=1,\ C=1,\ D=1 \quad \Rightarrow$$

$$\frac{x^3+2x^2+9}{x^2(x^2+9)} = \frac{1}{x^2} + \frac{x+1}{x^2+9} \implies$$

$$\int \frac{x^3+2x^2+9}{x^2(x^2+9)}dx = \int \frac{1}{x^2}dx + \int \frac{x+1}{x^2+9}dx$$

$$= -\frac{1}{x} + \int \frac{x}{x^2+9}dx + \int \frac{1}{x^2+\underbrace{9}_{3^2}}dx$$

$$= -\frac{1}{x} + \frac{1}{2}\ln(x^2+9) + \frac{1}{3}\tan^{-1}\left(\frac{x}{3}\right) + C.$$

d) $\int e^{\sqrt{x}}dx$

prøver $u = \sqrt{x}$

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \implies dx = 2\sqrt{x}\,du = 2u\,du$$

$$= \int e^u \cdot 2u\,du = 2\int \overset{v}{u} \cdot \overset{w'}{e^u}\,du = 2\left[u \cdot e^u - \int 1 \cdot e^u\,du\right]$$

$\downarrow \int$

e^u

$$= 2ue^u - 2e^u + C$$

$$= 2\sqrt{x}e^{\sqrt{x}} - 2e^{\sqrt{x}} + C$$

6 Volum sylinder

$$V = \pi r^2 h$$

r = radius
h = høyde

oppgitt : • V holder seg konstant (uavh. av t)

dvs
$$\frac{dV}{dt} = 0 = \pi \cdot \left[2\underset{4}{r} \underset{\substack{4 \\ \text{cm/min}}}{\frac{dr}{dt}} \underset{5}{h} + \underset{4^2}{r^2} \cdot \frac{dh}{dt} \right]$$

Ved $t = t_1$, oppgitt:

$$\Rightarrow \quad 0 = 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 5 + 4^2 \cdot \frac{dh}{dt}$$

$$\Rightarrow \quad \left.\frac{dh}{dt}\right|_{t_1} = \frac{-2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 5}{4^2} \frac{\text{cm}}{\text{min}} = \underline{-10 \ \text{cm/min}}$$

Areal sylinder

$$A = 2\pi r^2 + 2\pi r h$$

$$\frac{dA}{dt} = 2\pi \cdot \left[2\underset{4}{r} \cdot \underset{4}{\frac{dr}{dt}} + \underset{4}{\frac{dr}{dt}} \cdot \underset{5}{h} + \underset{4}{r} \cdot \underset{\boxed{-10}}{\frac{dh}{dt}} \right]$$

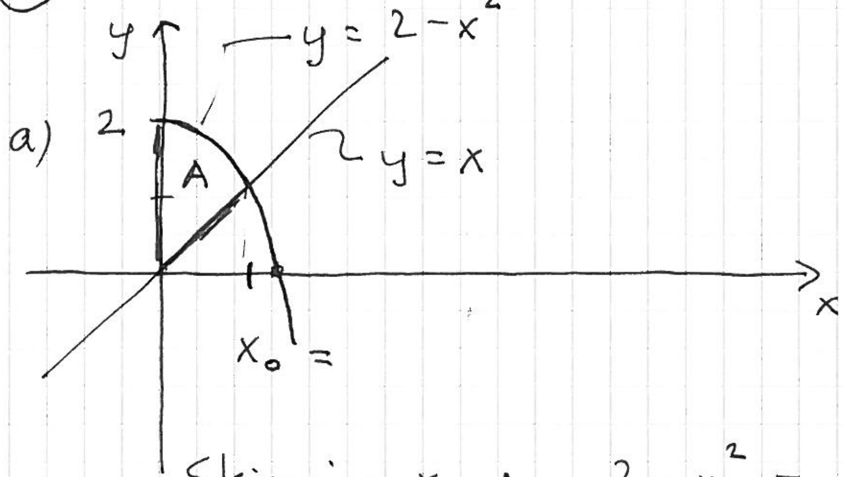
fann ovenfor!

$\Rightarrow$ ved $t = t_1$ er

$$\frac{dA}{dt} = 2\pi \cdot \left[2 \cdot 4 \cdot 4 + 4 \cdot 5 + 4(-10) \right] = \underline{\underline{24\pi \ \text{cm}^2/\text{min}}}$$

7

a)



Skjæring x_0 : $2 - x^2 = x$

$x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow \boxed{x = 1}, \cancel{-2}$

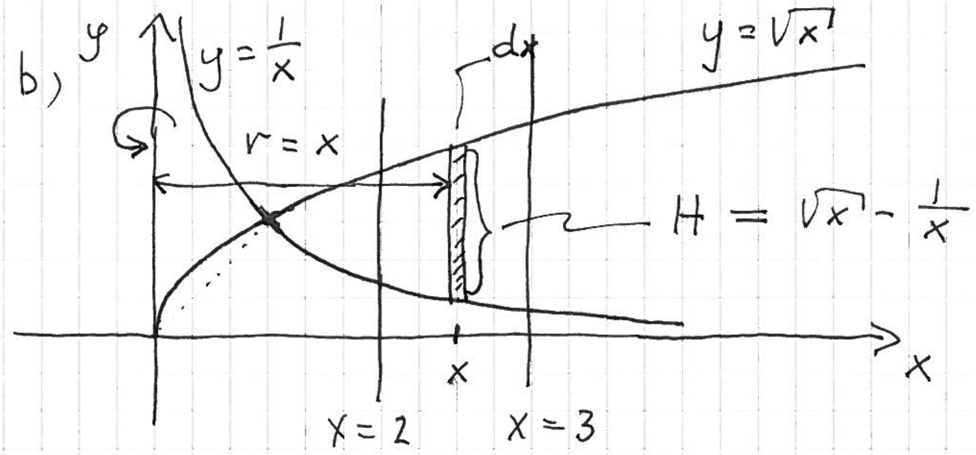
$\Rightarrow$ skjæring $\underline{x_0 = 1}$

$$\Rightarrow \text{areal } A = \int_0^1 ((2 - x^2) - x)\,dx$$

$$= \left(2x - \tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{2}x^2\right)\Big|_0^1$$

$$= 2 - \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{2} = \underline{\underline{\tfrac{7}{6}}}$$

b)



Sylinderskallmetoden :

$$V = \int_2^3 2\pi r H\,dx = \int_2^3 2\pi x\left(\sqrt{x} - \frac{1}{x}\right)dx = 2\pi \int_2^3 (x\sqrt{x} - 1)\,dx$$

$$= 2\pi\left(\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} - x\right)\Big|_2^3 = 2\pi\left(\frac{2}{5}3^{\frac{5}{2}} - 3 - \left(\frac{2}{5}2^{\frac{5}{2}} - 2\right)\right) =$$

$$= \underline{\underline{2\pi\left(\frac{2}{5}(9\sqrt{3} - 4\sqrt{2}) - 1\right)}} \qquad (\approx 18.68)$$