DET TEKNISK-NATURVITENSKAPLIGE FAKULTET

Universitetet i Stavanger

EKSAMEN I : ÅMA 100 Matematiske metoder 1

DATO : 21/2 - 2011.

EKSAMEN VARER : 5 timer (0900 - 1400).

TILLATTE HJELPEMIDLER :
K. Rottmann : Matematisk formelsamling.
Enkel, bestemt kalkulator.

OPPGAVESETTET BESTÅR AV : 7 oppgaver på 2 sider, og 2 sider formelark.

Oppgave 1

a) Løs ligningen $(1+i)z = 2+i$ med hensyn på z, og skriv svaret på kartesisk form.

b) Finn de tre løsningene av ligningen $w^3 = -8$, skriv dem på kartesisk form og tegn dem i det komplekse planet.

c) La $u = 2e^{i\pi/4}$ og $v = e^{-i\pi/6}$. Finn u^4v^3 og skriv svaret på kartesisk form.

Oppgave 2

a) Løs initialverdiproblemet $y' = 3x^2$; $y(0) = 1$.

b) Løs initialverdiproblemet $y'' + 4y = 4x^2$; $y(0) = 1/2$, $y'(0) = 2$.

c) Finn generell løsning av differensialligningen $y' = (1+y^2)(1+x^2)$.

d) Bruk integrerende faktor for å finne generell løsning av differensialligningen $y' - y = e^{2x}$. Sjekk svaret ved innsetting.

Oppgave 3

Bestem grenseverdiene

$$a)\ \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+x}{3x^2+2}; \quad b)\ \lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}.$$

Oppgave 4

En rettvinklet "kasse" har kvadratisk grunnflate med sidekant x (cm) og høyde y (cm). Total overflate av kassen blir da $A = 2x^2 + 4xy$. Vi antar x og y varierer med tiden t (min). Ved et bestemt tidspunkt t_1 er $x = 4$ cm, $y = 6$ cm, overflaten A vokser med 10 cm^2/min, mens høyden y avtar med 2 cm/min. Hvor fort endrer x seg ved tidspunktet t_1?

Oppgave 5

a) En kurve har ligningen $xy + x^3 + y^2 = 1$.

  (i) Finn et uttrykk for dy/dx og for dx/dy.

  (ii) Punktet $P(0, 1)$ ligger på kurven. Finn ligningen for tangenten til kurven i P.

b) Gitt funksjonen $g(x) = \sin^{-1}(2x) + \ln(2x + 1)$. Finn $g'(0)$.

c) Gitt funksjonen $f(x) = x^2(x + 2)^2$ definert for alle $x \in \mathbf{R}$. Bestem de intervall der $f(x)$ er minkende og de intervall der den er voksende.

Oppgave 6

Finn følgende integral (utregning må vises):

$$a)\ \int (x + 2\sqrt{x})\,dx; \quad b)\ \int_0^{\pi/2} \frac{\cos(x)}{1 + \sin(x)}\,dx;$$

$$c)\ \int \frac{x + 2}{(x - 1)(x + 1)}\,dx; \quad d)\ \int (2x + 3)\ln(x)\,dx\,.$$

Oppgave 7

a) Området A i 1. kvadrant er avgrenset av $y = \sin(x)$ og x - aksen, og ligger til venstre for den vertikale linja $x = 3\pi/4$. Finn arealet av A.

b) La D være det avgrensa området som ligger mellom grafen til $y = x^2$ og den horisontale linja $y = 1$. Bestem volumet av omdreiningslegemet som oppstår når D roteres om linja $x = 2$.

LYKKE TIL!

ÅMA100 – V2011

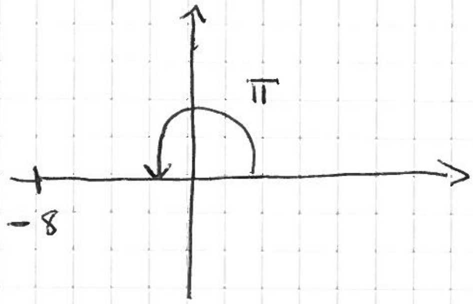
oppgave 1

a) $(1+i)z = 2+i \Rightarrow$

$$z = \frac{2+i}{1+i} = \frac{(2+i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{2+i-2i-i^2}{1^2+1^2}$$

$$= \frac{2-i+1}{2} = \frac{3-i}{2} = \underline{\underline{\frac{3}{2} - \frac{1}{2}i}}$$

b) $w^3 = -8$



$$\left.\begin{aligned} r &= |-8| = 8 \\ \theta &= \arg(-8) = \pi \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad -8 = 8e^{i\pi}$$

$$w^3 = 8e^{i\pi} \Rightarrow$$

$$w = \sqrt[3]{8}\, e^{i\left(\pi/3 + k\cdot\frac{2\pi}{3}\right)}, \quad k = 0, 1, 2$$

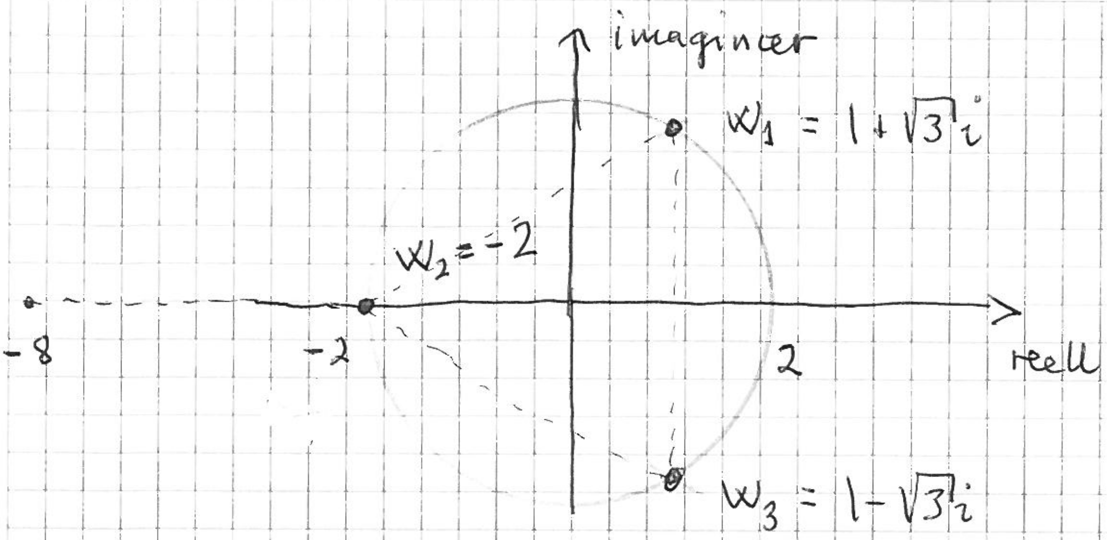
$$= 2e^{i\left(\pi/3 + k\cdot\frac{2\pi}{3}\right)}, \quad k = 0, 1, 2$$

$k=0$: $\boxed{w_1} = 2e^{i\pi/3} = 2(\cos\pi/3 + i\sin\pi/3) = \underline{\underline{1+\sqrt{3}\,i}}$

$k=1$: $\boxed{w_2} = 2e^{i\pi} = 2(\cos\pi + i\sin\pi) = \underline{\underline{-2}}$

$k=2$: $\boxed{w_3} = 2e^{i5\pi/3} = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right) = \underline{\underline{1-\sqrt{3}\,i}}$

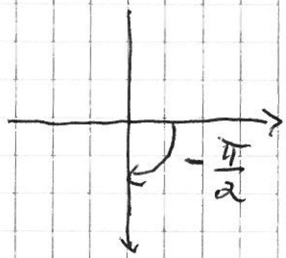
$\left(= 2e^{-i\pi/3}\right)$



c) $u = 2e^{i\pi/4}$, $v = e^{-i\pi/6}$

$$u^4 v^3 = \left(2e^{i\pi/4}\right)^4 \left(e^{-i\pi/6}\right)^3$$

$$= 2^4 e^{i \cdot \pi \cdot 4/4} \cdot e^{-i\pi \cdot 3/6}$$



$$= 16 e^{i\pi} e^{-i\pi/2} = 16(-1)(-i)$$

$$= \underline{\underline{16i}}$$

Oppgave 2

a) $y' = 3x^2$; $y(0) = 1$

$\Rightarrow \quad y = \int 3x^2 dx = x^3 + C$

$y(0) = C = 1 \Rightarrow \underline{\underline{y = x^3 + 1}}$

b) (*) $y'' + 4y = 4x^2, \quad y(0) = \frac{1}{2}, \; y'(0) = 2.$

• $\underline{y_h = ?}$ $\quad r^2 + 4 = 0 \Rightarrow r = \pm 2i$ (Case III)

$a = 0, b = 2$

$$\Rightarrow \quad y_h = C\cos(2x) + D\sin(2x);$$

• $y_s = ?$

$$\left.\begin{array}{l} y_s = Ax^2 + Bx + C \\ y_s' = 2Ax + B, \quad y_s'' = 2A \end{array}\right\} \text{Sett inn}$$

$$2A + 4(Ax^2 + Bx + C) = 4x^2$$

ordne: $\quad 4Ax^2 + 4Bx + 2A + 4C = 4x^2$

$\Rightarrow \quad 4A = 4 \Rightarrow \boxed{A = 1}; \quad 4B = 0 \Rightarrow \boxed{B = 0}$

$2A + 4C = 0 \Rightarrow \boxed{C = -\frac{1}{2}}$

$$\Rightarrow \quad y_s = x^2 - \frac{1}{2};$$

• generell løsning

$$y = y_h + y_s = C\cos 2x + D\sin 2x + x^2 - \frac{1}{2}$$

$$y' = -2C\sin 2x + 2D\cos 2x + 2x$$

$y(0) = C - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{C = 1}$

$y'(0) = 2D = 2 \Rightarrow \boxed{D = 1}$ $\Rightarrow$ entydig løsn

$$\underline{\underline{y = \cos(2x) + \sin(2x) + x^2 - \frac{1}{2}}}$$

c)
$$y' = (y^2+1)(x^2+1)$$

$$\frac{dy}{dx} = (y^2+1)(x^2+1)$$

$$\frac{dy}{y^2+1} = (x^2+1)\,dx \Rightarrow \int \frac{1}{y^2+1}\,dy = \int (x^2+1)\,dx$$

$$\Rightarrow \quad \tan^{-1}(y) = \frac{1}{3}x^3 + x + C$$

$$\underline{\underline{y = \tan\left(\frac{1}{3}x^3 + x + C\right)}}$$

d)
$$y' - y = e^{2x}$$

Integrerende faktor: $-1 \longrightarrow -x \longrightarrow \boxed{e^{-x}}$

$$(y'-y)e^{-x} = e^{2x}\cdot e^{-x} = e^{x}$$

$$(ye^{-x})' = e^{x}$$

$$ye^{-x} = \int e^{x}\,dx = e^{x} + C$$

$$y = \frac{e^{x}}{e^{-x}} + \frac{C}{e^{-x}} = \underline{\underline{e^{2x} + Ce^{x}}}$$

Oppgave 3

a) $$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+x}{3x^2+2} \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to\infty} \frac{2x+1}{6x} \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{6} = \underline{\underline{\frac{1}{3}}}$$

b) $$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}} = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{\sqrt{x}} = \underline{\underline{0}}$$

(5)

Sjekk: $y = e^{2x} + Ce^{x}$

$y' - y = 2e^{2x} + Ce^{x} - (e^{2x} + Ce^{x}) = \underline{e^{2x}}$

$\underline{\text{Ok}}$!

Oppgave 4

$$A = 2x^2 + 4xy$$

$$\underset{10}{\frac{dA}{dt}} = 2\cdot 2\underset{4}{x}\cdot \frac{dx}{dt} + 4\left(\frac{dx}{dt}\cdot \underset{6}{y} + \underset{4}{x}\cdot \underset{-2}{\frac{dy}{dt}}\right)$$

$$\Rightarrow \quad 10 = 16\frac{dx}{dt} + 4\left(6\frac{dx}{dt} - 8\right)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dx}{dt} = \frac{42}{40}\ \text{cm}/\text{m} = \underline{\underline{\frac{21}{20}\ \text{cm}/\text{min}}}$$

Oppgave 5

$$xy + x^3 + y^2 = 1$$

a)(i) $\frac{d}{dx}$: $1\cdot y + x\cdot y' + 3x^2 + 2y\cdot y' = 0$

$$(x+2y)y' = -y - 3x^2$$

$$\frac{dy}{dx} = y' = \underline{\underline{\frac{-y-3x^2}{x+2y}}}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dx}{dy} = \underline{\underline{\frac{-x-2y}{y+3x^2}}}$$

a)(ii) $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\substack{x=0\\y=1}} = \frac{-1-0}{0+2\cdot 1} = -\frac{1}{2} \Rightarrow$

ligni. tangent i P $\quad y - 1 = \left(-\frac{1}{2}\right)(x-0)$

$$\underline{\underline{y = -\frac{1}{2}x + 1}}$$

b) $g(x) = \sin^{-1}(2x) + \ln(2x+1)$

$$g'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-(2x)^2}} \cdot 2 + \frac{1}{2x+1} \cdot 2$$

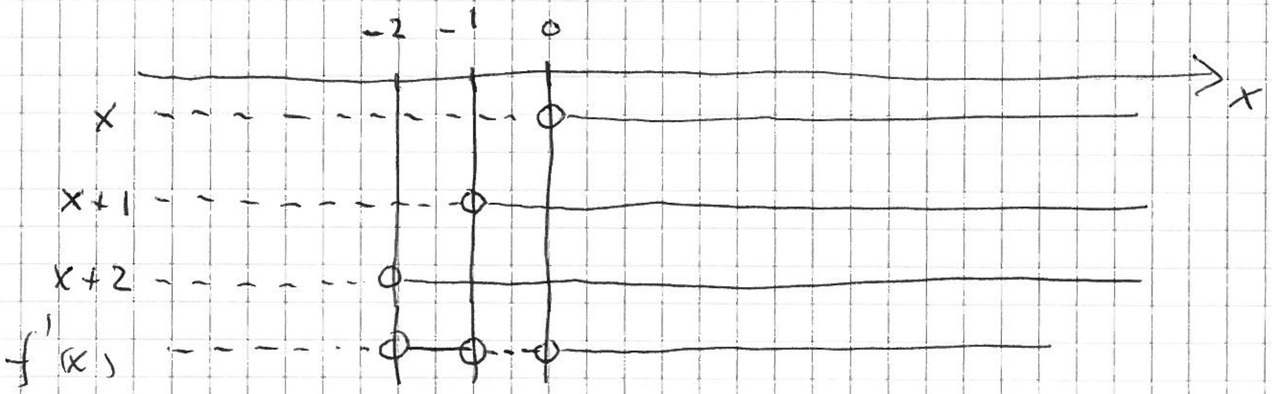
$$\Rightarrow \quad g'(0) = \frac{2}{\sqrt{1-0}} + \frac{2}{0+1} = \underline{\underline{4}}$$

c) $f(x) = x^2(x+2)^2$

$$f'(x) = 2x \cdot (x+2)^2 + x^2 \cdot 2(x+2)$$

$$= 2x(x+2)\left[x+2+x\right] = 2x(x+2)\,2(x+1)$$

$$= \underline{4x(x+1)(x+2)}$$



Ser: $f(x)$ er strengt voksende på $\underline{[-2,-1]}$ og $\underline{[0,\infty)}$

$f(x)$ er —"— minkende på $\underline{\underline{(-\infty,-2]}$ og $[-1,0]}}$

Oppgave 6

a) $$\int (x + 2\sqrt{x})\,dx = \frac{1}{2}x^2 + 2\int x^{\frac{1}{2}}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}x^2 + 2\cdot\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + C$$

$$= \underline{\underline{\frac{1}{2}x^2 + \frac{4}{3}x^{3/2} + C}}$$

b) $$\int \frac{\cos(x)}{1+\sin(x)}\,dx = \int \frac{du}{u} = \ln(|u|) + C$$

$u = 1+\sin(x)$

$$= \underline{\ln(|1+\sin x|) + C}$$

$du = \cos(x)\,dx$

$$\Rightarrow \int_0^{\pi/2} \frac{\cos(x)\,dx}{1+\sin x} = \ln(1+\sin(x))\Big|_0^{\pi/2}$$

$$= \ln(1+1) - \ln(1) = \underline{\underline{\ln(2)}}$$

c) $$\frac{x+2}{(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1}$$

$$A = \frac{x+2}{x+1}\Big|_{x=1} = \frac{3}{2}\ ;\quad B = \frac{x+2}{x-1}\Big|_{x=-1} = -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \int \frac{(x+2)\,dx}{(x-1)(x+1)} = \frac{3}{2}\int\frac{dx}{x-1} - \frac{1}{2}\int\frac{dx}{x+1} = \frac{3}{2}\ln|x-1|$$

$$\underline{\underline{- \frac{1}{2}\ln|x+1| + C}}$$

(9)

Delvis:

d) $\int (2x+3)\ln(x)\,dx = (x^2+3x)\ln(x) - \int (x^2+3x)\cdot\frac{1}{x}\,dx$

$\Downarrow \int$

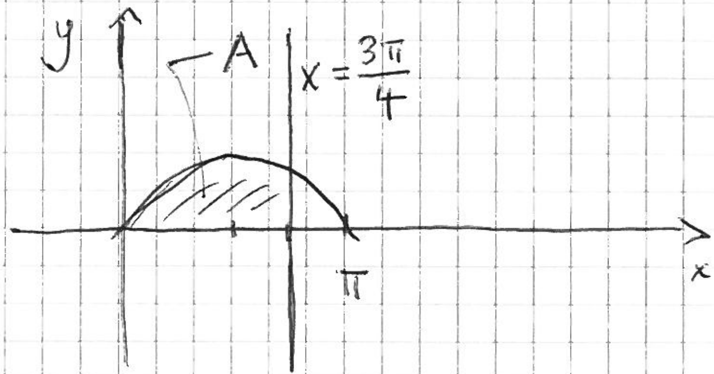
x^2+3x

$= (x^2+3x)\ln(x) - \int (x+3)\,dx$

$$= (x^2+3x)\ln(x) - \frac{1}{2}x^2 - 3x + C$$

oppgave 7

a)



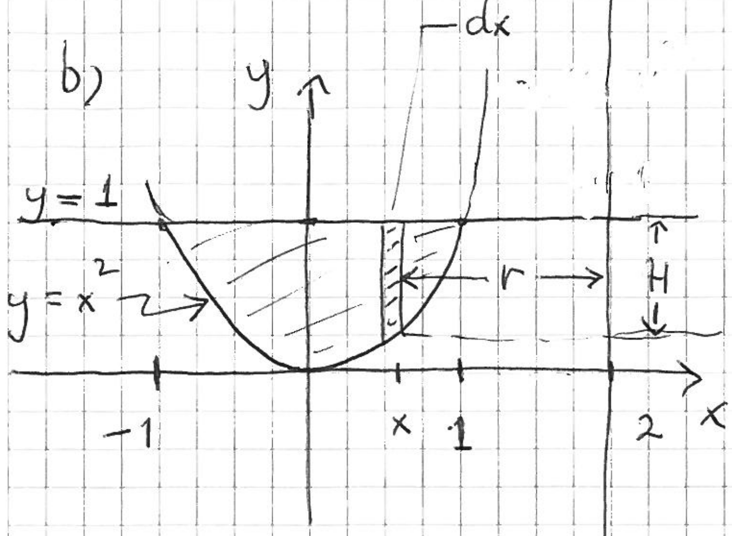
$$\text{Areal } A = \int_0^{\frac{3\pi}{4}} \sin(x)\,dx = -\cos(x)\Big|_0^{\frac{3\pi}{4}}$$

$$= -\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) - \cos(0)\right)$$

$$= -\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - 1\right)$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} + 1$$

b)



$r = 2 - x$

$H = 1 - x^2$

Skjæring:

$x^2 = 1 \iff x = \pm 1$

ok

Volum omdreiningslegeme

$$V = \int_{-1}^{1} 2\pi r H \, dx = \int_{-1}^{1} 2\pi (2 - x)(1 - x^2) \, dx$$

$$= 2\pi \int_{-1}^{1} (2 - x - 2x^2 + x^3) \, dx = 2\pi \left(2x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4 \right) \Big|_{-1}^{1}$$

$$= 2\pi \left(2 - \frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{1}{4} - \left(-2 - \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{1}{4} \right) \right)$$

$$= 2\pi \left(4 - \frac{4}{3} \right) = \underline{\underline{\frac{16\pi}{3}}}$$