Bokmål

DET TEKNISK-NATURVITENSKAPLIGE FAKULTET

EKSAMEN I : ÅMA 100 Matematiske metoder 1

DATO : 9/12 - 2011.

EKSAMEN VARER : 5 timer (0900 - 1400).

TILLATTE HJELPEMIDLER :
K. Rottmann : Matematisk formelsamling.
Enkel, bestemt kalkulator.

OPPGAVESETTET BESTÅR AV : 7 oppgaver på 2 sider, og 2 sider formelark.

Oppgave 1

a) Løs følgende ligning med hensyn på v:

$$(1+i)v = 4 - 5i.$$

b) La $u = -2\sqrt{3} - 2i$. Skriv u på eksponentialform.

c) Løs ligningen $w^2 = z$ der $z = 4e^{i4\pi/3}$ (dvs finn kvadratrøttene til z). Skriv løsningene på kartesisk form og tegn dem sammen med z i det komplekse plan.

Oppgave 2

a) Løs initialverdiproblemet $y'' - 2y' + 2y = 2x$; $y(0) = 1, y'(0) = 0$.

b) Løs initialverdiproblemet

$$y' = \frac{y^2}{\sqrt{4-x^2}}, \quad y(0) = \frac{1}{4}.$$

c) Bruk metoden med integrerende faktor til å finne generell løsning av differensialligningen (der a er en reell konstant)

$$y' + y = e^{ax}.$$

Oppgave 3

Gitt kurven med ligning $4x^2 + 2xy + y^2 = 12$.

a) Vis at $dy/dx = -(4x+y)/(x+y)$.

b) Finn de punktene på kurven der tangentlinja er *vertikal* (dvs står vinkelrett på x−aksen).

Oppgave 4

Finn følgende antideriverte (utregning må vises):

$$a) \int x^{-2/3}\,dx; \quad b) \int \frac{x}{\sqrt{3x^2+1}}\,dx;$$

$$c) \int \frac{1}{(x+1)x^2}\,dx; \quad d) \int \frac{1}{\sqrt{-2x-x^2}}\,dx.$$

Oppgave 5

a) Gitt funksjonen $f(x) = 3x^4 - 4x^3$. Finn maksimumsverdien og minimumsverdien til $f(x)$ på intervallet $x \in [-1, 2]$. Forklar framgangsmåten.

b) Bestem grenseverdien

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos(x)}{1 + x - e^x}.$$

Oppgave 6

La D være området i 1. kvadrant avgrenset av grafen til $y = 2x + 1$, x−aksen, y−aksen og linja $x = 1$. Bestem volumet av legemet som framkommer når D blir rotert om (a) x−aksen, og (b) linja $x = 2$.

Oppgave 7

a) I en sirkel endrer radien r (cm) seg med tiden t (min). På et bestemt tidspunkt t_1 er radien 10 cm og arealet av sirkelen vokser med 40 cm^2/min. Hvor fort endrer omkretsen i sirkelen seg ved dette tidspunktet?

b) Det skal lages en åpen vanntank med kvadratisk bunn og vertikale, rektangulære sidevegger. Vi lar sidekanten i bunnflaten være x meter og høyden i sideveggene være h meter. Prisen på materialet i bunnflaten er 160 kr/m^2 og prisen på materialet i sideveggene er 120 kr/m^2.

   i) Vi antar at tanken skal romme 10 m^3. Vis at total pris P (kr) for materialet i tanken da kan uttrykkes kun ved x, som

   $$P = 160x^2 + \frac{4800}{x}.$$

   ii) Bestem verdien av x som gjør at den totale kostnaden blir minimal.

LYKKE TIL!

ÅMA 100 H 2011

Oppgave 1

a) $$(1+i)v = 4-5i$$

$$v = \frac{4-5i}{1+i} = \frac{(4-5i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}$$

$$= \frac{4-5i-4i+5i^2}{1^2+1^2} -$$

$$= \frac{-1-9i}{2} = \underline{\underline{-\frac{1}{2} - \frac{9}{2}i}}$$

b) $u = -2\sqrt{3} - 2i$; u i $\underline{\text{III. kvadrant}}$

$$\boxed{r} = |u| = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + 2^2} = \sqrt{4\cdot 3+4} = \sqrt{16} = \boxed{4}$$

$$\boxed{\theta} = \arg(u) = \tan^{-1}\left(\frac{-2}{-2\sqrt{3}}\right) - \pi$$

$$= \tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{3}} - \pi = \frac{\pi}{6} - \pi = \boxed{-\frac{5\pi}{6}}$$

$$\Rightarrow \qquad \underline{\underline{u = 4e^{-i5\pi/6}}}$$

c)

$$w^2 = z = 4e^{i4\pi/3}$$

$$\Rightarrow \quad w = \sqrt{4}\, e^{i\left(2\pi/3 + k\cdot\frac{2\pi}{2}\right)} \quad , \quad k = 0, 1$$

$$= 2e^{i\left(2\pi/3 + k\pi\right)} \quad , \quad k = 0, 1$$

$k = 0 \Rightarrow$

$$w_1 = 2e^{i2\pi/3}$$

$$= 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$$

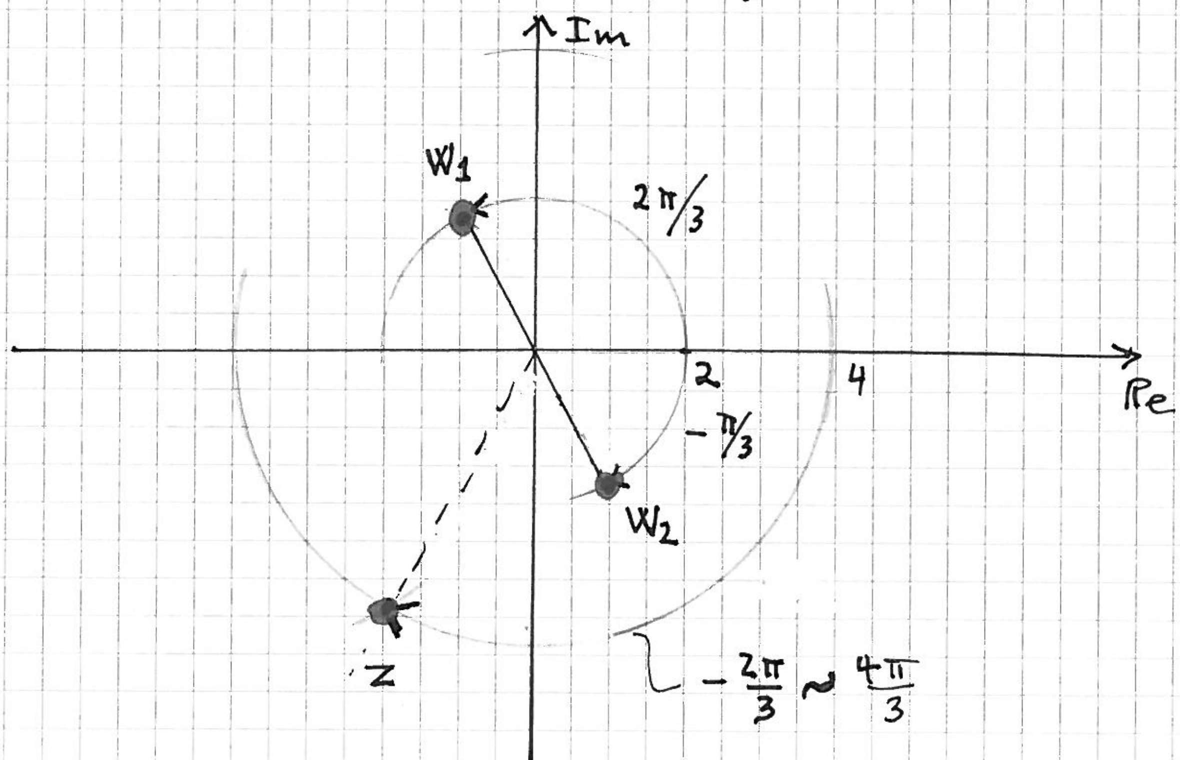
$$= 2\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = \underline{\underline{-1 + \sqrt{3}\,i}}$$

$k = 0 \Rightarrow$

$$w_2 = 2e^{i(2\pi/3 + \pi)} = 2e^{i5\pi/3} = 2e^{-i\pi/3}$$

$$= 2\left(\cos -\frac{\pi}{3} + i\sin -\frac{\pi}{3}\right)$$

$$= 2\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = \underline{\underline{1 - \sqrt{3}\,i}}$$



Oppgave 2

a) $$y'' - 2y' + 2y = 2x \; ; \quad y(0) = 1, \; y'(0) = 0$$

- Karakteristisk ligning:

$$r^2 - 2r + 2 = 0 \implies r = \frac{2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 2}}{2}$$

$$\implies \quad \underline{r = 1 \pm i} \qquad (\text{Case III})$$

$\implies$ generell løsning av $(*)_h$

$$\underline{y_h = Ce^x \cos(x) + De^x \sin(x)}$$

- HS $= 2x \implies$ prøver $\left.\begin{aligned} y_s &= Ax + B \\ y_s' &= A, \; y_s'' = 0 \end{aligned}\right\}$

$\implies$

$$0 - 2 \cdot A + 2(Ax + B) = 2x$$

ordne: $$2Ax + 2B - 2A = 2x$$

$$\implies \quad 2A = 2, \quad 2B - 2A = 0 \quad \implies$$

$$\boxed{A = 1}, \quad \boxed{B = 1}$$

$$y_s = x + 1$$

$\implies$ gen. løsning

$$\underline{y} = y_h + y_s = \underline{Ce^x \cos(x) + De^x \sin(x) + x + 1}$$

Bestemme C og D:

$$y(0) = Ce^0\cos(0) + De^0\sin(0) + 0 + 1 = 1$$

$$\Leftrightarrow \qquad C + 1 = 1$$

$$\boxed{C = 0}$$

$$\Rightarrow \quad y = De^x\sin(x) + x + 1$$

$$y' = D\cdot\left(e^x\sin(x) + e^x\cos x\right) + 1$$

$$y'(0) = D\left(e^0\cdot\sin(0) + e^0\cos(0)\right) + 1 = 0$$

$$D + 1 = 0$$

$$\boxed{D = -1}$$

$\Rightarrow$ entydig løsning av gitt IVP

$$\underline{\underline{y = -e^x\sin(x) + x + 1}}$$

b) $$y' = \frac{y^2}{\sqrt{4-x^2}} \; ; \quad y(0) = \frac{1}{4} \; .$$

Separabel:
$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{\sqrt{4-x^2}} \; ; \quad \frac{dy}{y^2} = \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$$

$$\int \frac{1}{y^2}\,dy = \int \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\,dx$$

$4 = 2^2$

$$-\frac{1}{y} = \sin^{-1}\left(\frac{x}{2}\right) + C_1 \quad \text{(standardintegral)}$$

$\Rightarrow$

$$y = \frac{1}{-\sin^{-1}\left(\frac{x}{2}\right) - C_1} \quad C$$

$$y = \frac{1}{C - \sin^{-1}\left(\frac{x}{2}\right)} \quad \text{, generell løsn.}$$

$$y(0) = \frac{1}{C - \sin^{-1}\left(\frac{0}{2}\right)} = \frac{1}{C} = \frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{C = 4}$$

$\Rightarrow$ Løsning av IVP

$$\underline{\underline{y = \frac{1}{4 - \sin^{-1}\left(\frac{x}{2}\right)}}}$$

c)

$$y' + y = e^{ax}$$

Integrerende faktor: $1 \rightarrow \int 1 \cdot dx = x \rightarrow \boxed{e^x}$

Mult. likn. med e^x

$$(y' + y)e^x = e^{ax} \cdot e^x$$

teori! $\longrightarrow$ ‖

$$(ye^x)' = e^{(a+1)x}$$

$$\Rightarrow \quad ye^x = \int e^{(a+1)x} dx = \frac{1}{a+1} e^{(a+1)x} + C$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{y = \frac{1}{a+1} e^{ax} + Ce^{-x}}}$$

Oppgave 3

$$(*) \quad 4x^2 + 2xy + y^2 = 12$$

a) $\frac{d}{dx}$ av $(*)$: $4 \cdot 2x + 2 \cdot (1 \cdot y + xy') + 2yy' = 0$

$$\Rightarrow \quad 8x + 2y + 2xy' + 2yy' = 0 \qquad \left[y' = \frac{dy}{dx} \right]$$

$$y' \cdot (2x + 2y) = -8x - 2y$$

$$\frac{dy}{dx} = y' = \frac{-8x - 2y}{2x + 2y}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{(4x + y)}{x + y}$$

b) tangenlinja i P vertikal $\Leftrightarrow \left. \frac{dx}{dy} \right|_P = 0$

Vet: $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} = -\frac{(x+y)}{4x+y}$

$$\frac{dx}{dy} = 0 \Rightarrow x + y = 0 \Rightarrow \boxed{y = -x}$$

Sett $y = -x$ inn i kurveligningen:

$$4x^2 + 2x(-x) + (-x)^2 = 12 \text{ , dvs}$$

$$3x^2 = 12$$

$$\Leftrightarrow \quad x = \pm 2$$

$$\left.\begin{array}{l} x = 2 \Rightarrow y = -2 \\ x = -2 \Rightarrow y = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow$$ 2 pkt på kurven der tangenten er vertikal:

$$\underline{\underline{(2,-2) \text{ og } (-2,2)}}$$

Oppgave 4

a) $\int x^{-\frac{2}{3}} dx = \frac{1}{-\frac{2}{3}+1} x^{-\frac{2}{3}+1} + C = \underline{\underline{3x^{\frac{1}{3}} + C}}$

b) $\int \frac{x}{\sqrt{3x^2+1}} dx = \int \frac{\cancel{x}}{\sqrt{u}} \cdot \frac{du}{6\cancel{x}}$

$\boxed{u = 3x^2 + 1}$

$\frac{du}{dx} = 3 \cdot 2x$,

$\boxed{dx = \frac{du}{6x}}$

$= \frac{1}{6} \int \frac{1}{\sqrt{u}} du = \frac{1}{6} 2\sqrt{u} + C$

$= \underline{\underline{\frac{1}{3}\sqrt{3x^2+1} + C}}$

c) $\int \frac{1}{(x+1)x^2} dx \rightarrow$ delbrøk:

$$\frac{1}{(x+1)x^2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x} + \frac{C}{x^2} \longrightarrow$$

$$1 = Ax^2 + Bx(x+1) + C(x+1)$$

$x=0$ gir

$$1 = A\cdot 0 + B\cdot 0 + C(0+1) \Rightarrow \boxed{C=1}$$

$x=-1$ gir

$$1 = A(-1)^2 + B\cdot 0 + C\cdot 0 \Rightarrow \boxed{A=1}$$

$x=1$ f.eks, gir så

$$1 = 1\cdot 1^2 + B\cdot 1\cdot 2 + 1\cdot(2) \Rightarrow \boxed{B=-1}$$

$$\Rightarrow \int \frac{1}{(x+1)x^2}\,dx = \int\left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)dx$$

$$= \underline{\underline{\ln|x+1| - \ln|x| - \frac{1}{x} + C}}$$

Alternativt, ubestemte koeffisienter:

$$1 = Ax^2 + Bx^2 + Bx + Cx + C$$

$$1 = (A+B)x^2 + (B+C)x + C$$

$\Rightarrow \boxed{C=1}$

$\Rightarrow B+C=0 \Rightarrow \boxed{B=-1}$ OK

$\Rightarrow A+B=0 \Rightarrow \boxed{A=1}$

d) $\int \frac{1}{\sqrt{\underbrace{-2x-x^2}}}\,dx \rightarrow$ modell $\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx = \sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)+C$

fullstendig kvadrat:

$$-x^2-2x = -(x^2+2x) = -(x^2+2x+1-1)$$
$$= -((x+1)^2-1)$$
$$= \underline{1-(x+1)^2}$$

$\Rightarrow$

$$\int \frac{1}{\sqrt{-2x-x^2}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{1-(x+1)^2}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\,du$$

opplagt $\left.\begin{matrix} u = x+1 \\ dx = du \end{matrix}\right\}$

$$= \sin^{-1}(u) + C$$

$$= \underline{\underline{\sin^{-1}(x+1) + C}}$$

Oppgave 5

a) $f(x) = 3x^4 - 4x^3, \quad x \in [-1, 2]$

<u>Kandidatpkt</u> for global max/min-verdi:

- endepkt: $\boxed{x=-1}$, $\boxed{x=2}$
- $f'(x) = 3\cdot 4x^3 - 4\cdot 3x^2 = 12x^3 - 12x^2$

$$= 12x^2\cdot(x-1) \longrightarrow$$

- $\Rightarrow f(x)$ deriverbar for alle x
- $\Rightarrow f'(x) = 0 \iff 12x^2(x-1) = 0 \iff$

$$\boxed{x=0}, \quad \boxed{x=1}$$

Så vi har 4 kandidatpkt for max/min på $[-1, 2]$;

og funksjonsverdien i disse blir:

$$f(-1) = 3(-1)^4 - 4(-1)^3 = 7$$

$$f(0) = 0$$

$$f(1) = 3\cdot 1^4 - 4\cdot 1^3 = -1$$

$$f(2) = 3\cdot 2^4 - 4\cdot 2^3 = 16$$

[Metoden er her lagt inn i utregningen]

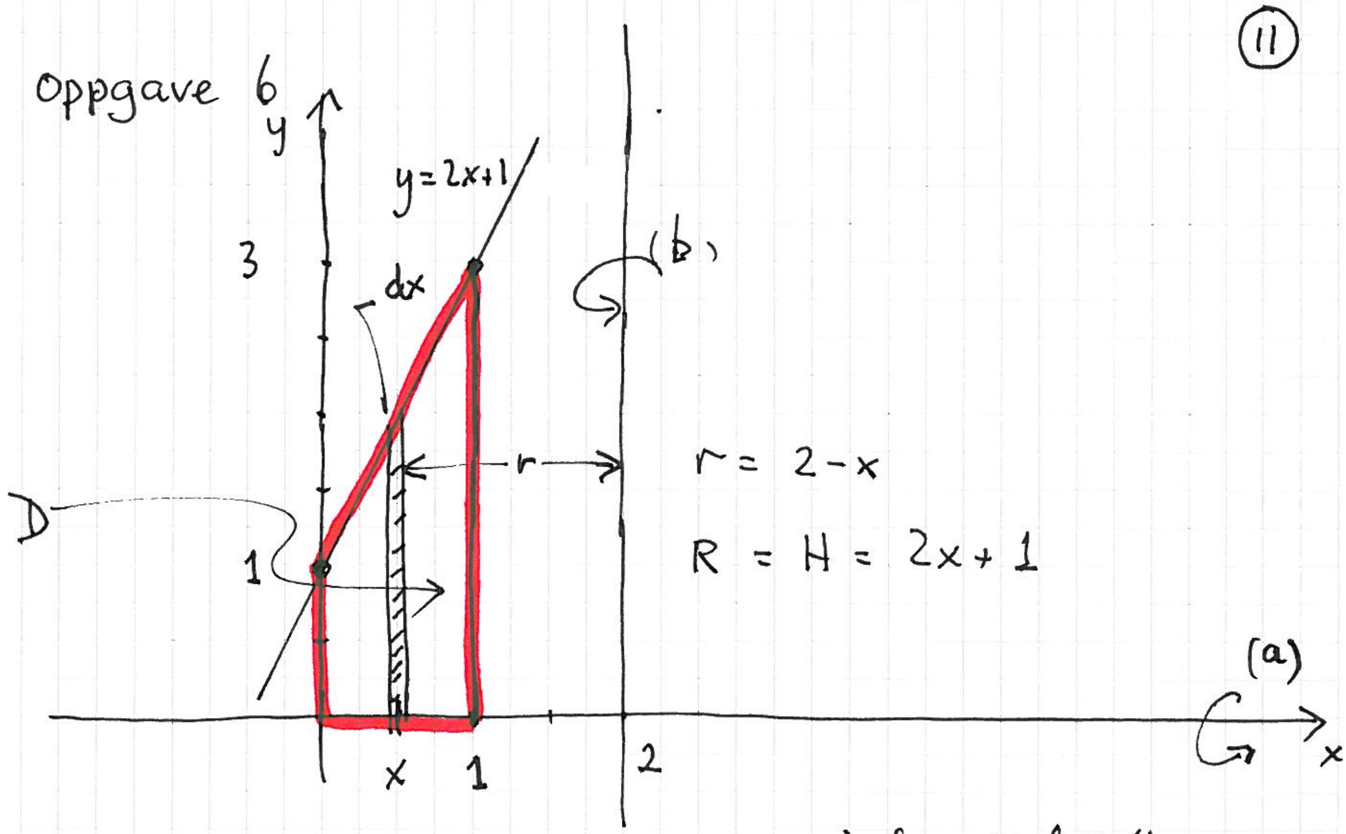
$\Rightarrow$ maxverdi av $f(x)$ er 16, for $x = 2$;
minverdi av $f(x)$ er -1, for $x = 1$.

b)

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{1+x-e^x} \left[\frac{0}{0}\right] \overset{\text{l'Hôpital}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{1-e^x} \left[\frac{0}{0}\right] \overset{\text{Hôp. igjen}}{=}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)}{-e^x} = \frac{1}{-1} = \underline{\underline{-1}}$$

Oppgave 6



$r = 2-x$

$R = H = 2x+1$

r = indre rad = 0

(a) $$V = \int_0^1 \pi(R^2 - r^2)\,dx$$

$$= \int_0^1 \pi(2x+1)^2\,dx = \pi \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}(2x+1)^3 \Big|_0^1$$

$$= \frac{\pi}{6}\left((2\cdot 1+1)^3 - (2\cdot 0+1)^3\right) = \underline{\underline{\frac{13\pi}{3}}}$$

(b) Roter D rundt linja $x = 2$: <u>Sylinderskallmet:</u>

Da er $r = 2-x$, $H = 2x+1$ $\Rightarrow$

$$V = \int_0^1 2\pi r H\,dx = \int_0^1 2\pi(2-x)(2x+1)\,dx \longrightarrow$$

$$2\pi \int_0^1 (-2x^2 + 3x + 2)\,dx = 2\pi \left(-\frac{2}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 2x\right)\Big|_0^1$$

$$= 2\pi\left(-\frac{2}{3} + \frac{3}{2} + 2\right) = \underline{\underline{\frac{17\pi}{3}}}$$

Oppgave 7

a) <u>Sirkel:</u> $A = \pi r^2$, $O = 2\pi r$

Gitt ved $t = t_1$:

- $r = 10$ cm
- $\frac{dA}{dt} = 40$ cm²/min

<u>Problem:</u> Hva er $\frac{dO}{dt}\Big|_{t=t_1}$?

$$\frac{dA}{dt} = \pi \cdot 2r \frac{dr}{dt} \Rightarrow 40 = \pi \cdot 2 \cdot 10 \cdot \frac{dr}{dt}$$

$$\frac{dO}{dt} = 2\pi \frac{dr}{dt} = \cancel{2\pi} \cdot \frac{40}{\cancel{\pi \cdot 2} \cdot 10} = \underline{\underline{4 \text{ cm/min}}}$$

b) pris bunnflate : $160 \, kr/m^2$

sideflate : $120 \, kr/m^2$

Areal bunnflate : $x^2 \, m^2$

Areal sideflater : $4xh \, m^2$

$\Rightarrow$ total pris $P = 160x^2 + 120 \cdot 4xh$ $[kr/m^2 \cdot m^2 = \underline{kr}]$

, Gitt: Volum av tanken $= 10 \, m^3$:

$$x^2 \cdot h = 10$$

$$\Rightarrow \quad \underline{h = \frac{10}{x^2}}$$ sett inn i P:

$\Rightarrow$

$$P = 160x^2 + 120 \cdot 4x \cdot \overset{h}{\frac{10}{x^2}} \quad (kr)$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{P = 160x^2 + \frac{4800}{x}}}, \text{ ok}$$

ii) Må finne globalt minpkt for P når $x \in (0, \infty)$:

Vet: $\frac{dP}{dx} = 0$ i minpkt $\Rightarrow$

$$P' = \frac{d}{dx} = 160 \cdot 2x - \frac{4800}{x^2} = 0 \longrightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \frac{320x^3 - 4800}{x^2} = 0$$

$$\Rightarrow \quad 320x^3 = 4800$$

$$x^3 = \frac{4800}{320} = 15$$

$$\Rightarrow \quad x = \sqrt[3]{15} \approx \underline{2{,}47\ m}$$

- Kun ett pkt der $\frac{dP}{dx} = 0$
- $P \to \infty$ når $x \to 0^+$ og når $x \to \infty$

$\Rightarrow$ Sidekanten i bunnflata $x \approx 2{,}47$ m gir **minimal pris P**.