DET TEKNISK-NATURVITENSKAPLIGE FAKULTET

EKSAMEN I : ÅMA 100 Matematiske metoder 1

DATO : 25/2 - 2012.

EKSAMEN VARER : 5 timer (0900 - 1400).

TILLATTE HJELPEMIDLER :
K. Rottmann : Matematisk formelsamling.
Enkel, bestemt kalkulator.

OPPGAVESETTET BESTÅR AV : 7 oppgaver på 2 sider, og 2 sider formelark.

Oppgave 1

a) Skriv det komplekse tallet

$$u = \frac{(2-i)^2}{3+i}$$

på kartesisk form.

b) Finn de tre komplekse løsningene av ligningen $w^3 = i$. Skriv løsningene på eksponentialform, og tegn dem i det komplekse plan.

c) La $z = \sqrt{2}/2 + (\sqrt{2}/2)\,i$. Skriv z på eksponentialform, og finn z^{100}.

Oppgave 2

a) Vi ser på den 2. ordens differensialligningen $(*)$: $y'' - y = \sin(2x)$.

i) Finn *generell løsning* av ligningen $(*)$ (du får oppgitt at ligningen har en løsning y_s på form $y_s = A\sin(2x)$, der A er en reell konstant).

ii) Finn så løsningen til $(*)$ som oppfyller initialbetingelsene $y(0) = y'(0) = 0$.

b) Finn den generelle løsningen av differensialligningen

$$y' = \frac{e^{2x}}{y}.$$

c) Bruk metoden med integrerende faktor til å løse initialverdiproblemet

$$y' - 3y = e^{2x}; \quad y(0) = 0.$$

Oppgave 3

a) En kurve har ligningen $x + \sin(y) = xy$. Punktet $P(0,0)$ ligger på kurven. Finn ligningen til tangentlinja til kurven i punktet P.

b) La $P = \sqrt{t^2+1}$ og $V = \sin(P) + P$. Finn et uttrykk for dV/dt.

Oppgave 4

Finn følgende antideriverte (utregning må vises):

$$a) \int (2x+1)^3\,dx; \quad b) \int x\sin(3x^2+1)\,dx;$$

$$c) \int \frac{3x^2+8}{x(x^2+4)}\,dx; \quad d) \int \frac{1}{x^2-2x+5}\,dx.$$

Oppgave 5

a) Gitt funksjonen $f(x) = x^4 - 8x^2 + 10$ definert for $x \in \mathbf{R}$. Finn alle lokale ekstremalpunkter til $f(x)$.

b) Bestem grenseverdien

$$\lim_{x\to 1} \frac{2x^2 - (3x+1)\sqrt{x} + 2}{x-1}.$$

Oppgave 6

La D være området i 1. kvadrant avgrenset av grafen til $y = x + \sqrt{x}$, linja $x = 1$, og $x-$aksen.

a) Bestem arealet av D.

b) Bestem volumet av omdreiningslegemet som oppstår når D roteres omkring y - aksen.

Oppgave 7

a) I en sirkel endrer radien r (cm) seg med tiden t (min). På et bestemt tidspunkt t_1 er radien 4 cm og omkretsen vokser med 2 cm/min. Hvor fort vokser arealet av sirkelen ved dette tidspunktet?

b) Du har et kvadratisk pappstykke med sidekant a cm. Du skal lage en boks (uten lokk) ved å klippe bort like store kvadratiske biter med sidekant x cm fra hvert hjørne av pappstykket, og så brette opp de fire gjenstående "flikene". Boksen får da kvadratisk grunnflate med sidekant $a - 2x$, høyden i boksen blir x, så volumet av boksen blir $V = x(a-2x)^2$. Bestem den verdien av x som gjør V maksimal (uttrykk svaret ved a).

Lykke til!

ÅMA 100 – V12

Oppgave 1

a)
$$u = \frac{(2-i)^2}{3+i} = \frac{4-2\cdot 2i + i^2}{3+i} = \frac{(3-4i)(3-i)}{(3+i)(3-i)}$$

$$= \frac{9-12i-3i+4i^2}{3^2+1^2} = \frac{5-15i}{10} = \underline{\underline{\frac{1}{2} - \frac{3}{2}i}}$$

b) $w^3 = i$, $w = ?$

$\theta = \arg(i) = \frac{\pi}{2}$, $r = |i| = 1 \implies i = e^{i\pi/2}$

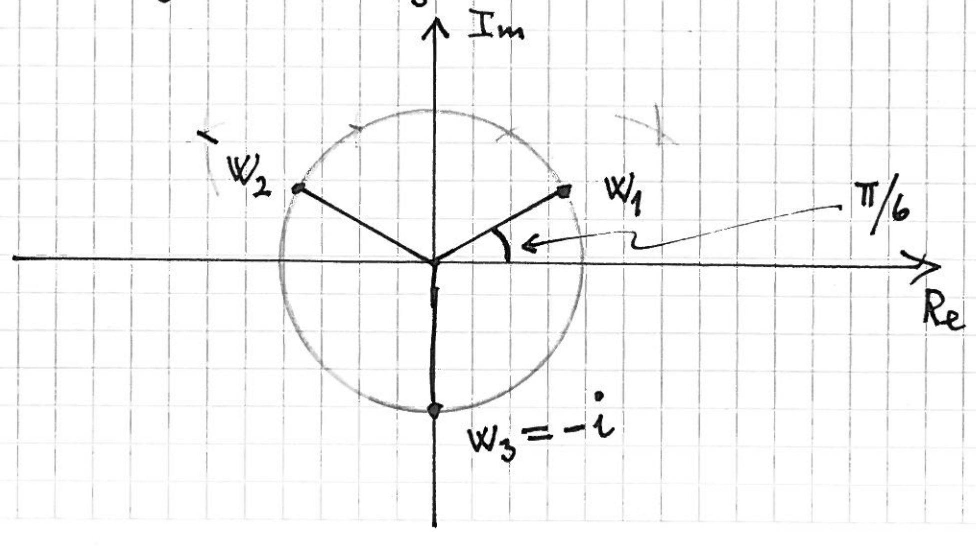
Så vi har
$$w^3 = e^{i\pi/2}$$

som har løsn
$$w = e^{i\left(\pi/6 + k\cdot\frac{2\pi}{3}\right)}, \quad k = 0, 1, 2$$

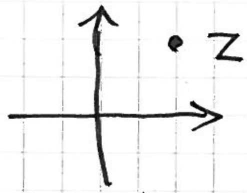
$k=0$ gir $\quad w_1 = \underline{\underline{e^{i\pi/6}}}$

$k=1$ gir $\quad w_2 = e^{i\left(\pi/6 + \frac{2\pi}{3}\right)} = \underline{\underline{e^{i5\pi/6}}}$

$k=2$ gir $\quad w_3 = e^{i\left(\pi/6 + 4\pi/3\right)} = e^{i3\pi/2} = \underline{\underline{e^{-i\pi/2}}} = -i$



c) $z = \sqrt{2}/2 + \sqrt{2}/2 \cdot i$,



$$\theta = \arg(z) = \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}/2}{\sqrt{2}/2}\right) = \tan^{-1}(1) = \frac{\pi}{4}$$

$$r = |z| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} = 1$$

$\Rightarrow$

$$z = e^{i\pi/4}$$

de Moivre $\Rightarrow$ $z^{100} = (e^{i\pi/4})^{100} = e^{i100\pi/4}$

$$= \underline{\underline{e^{i25\pi}}} = e^{i\pi} = \cos\pi + i\sin\pi = \underline{\underline{-1}}.$$

$25\pi = \cancel{12 \cdot 2\pi} + \pi$

Oppgave 2

a) $(*) \quad y'' - y = \sin(2x)$

i) Karakteristisk ligning $r^2 - 1 = 0$, $r = \pm 1 \Rightarrow$ generell løsn. av $(*)_h$

$$\underline{y_h = Ce^{x} + De^{-x}}$$

oppgitt $y_s = A\sin(2x)$, $y_s' = 2A\cos(2x)$, $y_s'' = -4A\sin(2x)$

$\Rightarrow$ sett inn i $(*)$:

$$y_s'' - y_s = -4A\sin(2x) - A\sin(2x) = \sin 2x$$

$$-5A\sin(2x) = \sin(2x)$$

$$\Rightarrow \boxed{A = -\frac{1}{5}}$$

gir $\quad y_s = -\frac{1}{5}\sin(2x)$

og dermed generell løsning av (*):

$$y = y_h + y_s = Ce^{x} + De^{-x} - \frac{1}{5}\sin(2x), \quad C, D \in \mathbb{R}$$

ii)

$$y(0) = C\cdot e^{0} + D\cdot e^{0} - 0 = 0$$

$$C + D = 0 \quad I)$$

$$y' = Ce^{x} - De^{-x} - \frac{2}{5}\cos(2x)$$

$$y'(0) = C\cdot e^{0} - D\cdot e^{0} - \frac{2}{5}\cdot 1 = 0$$

$$C - D = \frac{2}{5} \quad II)$$

I) + II) gir $C = \frac{1}{5}$, $D = -\frac{1}{5}$ $\Rightarrow$ entydig løsning av IVP:

$$y = \frac{1}{5}e^{x} - \frac{1}{5}e^{-x} - \frac{1}{5}\sin(2x)$$

2b)

$$y' = \frac{e^{2x}}{y}$$

Leibniz: $\frac{dy}{dx} = \frac{e^{2x}}{y}$

Separer: $y\,dy = e^{2x}dx$

$$\int y\,dy = \int e^{2x}dx$$

$$\frac{1}{2}y^2 = \frac{1}{2}e^{2x} + C'$$

$$y^2 = e^{2x} + 2C' \sim C$$

$$\underline{\underline{y = \pm\sqrt{e^{2x} + C}}}\ , \quad C \in \mathbb{R}$$

2c)

$$(*)\begin{cases} y' - 3y = e^{2x} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Integrerende faktor for (*):

$$-3 \longrightarrow \int(-3)dx = -3x \longrightarrow \boxed{e^{-3x}}$$

$$(y' - 3y)\cdot e^{-3x} = e^{2x}\cdot e^{-3x} = e^{-x}$$

$\vdots$

Gir pr. teori

$$(ye^{-3x})' = e^{-x}$$

$$ye^{-3x} = \int e^{-x}dx = -e^{-x} + C$$

$$y = -\frac{e^{-x}}{e^{-3x}} + \frac{C}{e^{-3x}}$$

Generell løsning :

$$\underline{y = -e^{2x} + Ce^{3x}}$$

$$y(0) = -e^{0} + Ce^{0} = -1 + C = 0$$

$$\boxed{C = 1}$$

Løsning av IVP:

$$\underline{\underline{y = -e^{2x} + e^{3x}}}$$

Oppgave 3

a) $x + \sin(y) = xy$

$\frac{d}{dx}$: $1 + \cos(y) \cdot y' = 1 \cdot y + x \cdot y'$

$P(0,0)$ gir $1 + 1 \cdot y' = 1 \cdot 0 + 0 \cdot y'$

$$\underline{y' = -1}$$

$\Rightarrow$ lign. tangent i $P(0,0)$ blir $y - 0 = (-1)(x-0)$,

dvs $\underline{\underline{y = -x}}$

b) $P = \sqrt{t^2+1}$, $V = \sin(P) + P$

$$\Rightarrow \frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dP} \cdot \frac{dP}{dt} = (\cos(P) + 1) \cdot \frac{1}{2\sqrt{t^2+1}} \cdot 2t$$

$$= \underline{\underline{\frac{(\cos(P)+1)t}{\sqrt{t^2+1}}}}.$$

Oppgave 4

a) $\int (2x+1)^3 dx = \int u^3 \cdot \frac{du}{2} = \frac{1}{2}\int u^3 du = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} u^4 + C$

$u = 2x + 1$,

$du = 2dx$

$$= \frac{1}{8}u^4 + C = \underline{\underline{\frac{1}{8}(2x+1)^4 + C}}$$

b) $\int x\sin(3x^2+1)\,dx = \int \cancel{x}\sin(u)\frac{du}{6\cancel{x}} = \frac{1}{6}\int \sin(u)\,du$

$u = 3x^2+1$

$du = 6x\,dx$

$dx = \frac{du}{6x}$

$= \frac{1}{6}(-\cos u) + C = -\frac{1}{6}\cos(3x^2+1) + C$

c) $\int \frac{3x^2+8}{x(x^2+4)}\,dx = ?$

Delbrøk:

$$\frac{3x^2+8}{x(x^2+4)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+4}$$

$$\Rightarrow \quad 3x^2+8 = A(x^2+4)+(Bx+C)x$$

$$3x^2+8 = (A+B)x^2 + Cx + 4A$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{lll} 4A = 8, & \text{dvs} & \boxed{A=2} \\ C = 0, & \text{dvs} & \boxed{C=0} \\ A+B=3, & \text{dvs} & \boxed{B=1} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

standard integral

$$\int \frac{3x^2+8}{x(x^2+4)}\,dx = \int\left(\frac{2}{x} + \frac{x}{x^2+4}\right)dx = 2\ln|x| + \frac{1}{2}\ln(x^2+4) + C$$

d) $\int \frac{1}{x^2-2x+5}\,dx = ?$

Fullstendig kvadrat:

$$x^2-2x+5 = x^2-2x+\left(\frac{2}{2}\right)^2-\left(\frac{2}{2}\right)^2+5$$

$$= x^2-2x+1-1+5 = \underline{(x-1)^2+4}$$

$$\int \frac{1}{x^2-2x+5}\,dx = \int \frac{1}{(x-1)^2+4}\,dx = \int \frac{1}{u^2+\underbrace{4}_{2^2}}\,du$$

$u = x-1$
$du = dx$

$$= \frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{u}{2}\right) + C$$

$$= \underline{\underline{\frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{x-1}{2}\right) + C}}$$

<u>oppgave 5</u>

$$f(x) = x^4-8x^2+10,\ x \in \mathbb{R}$$

$$f'(x) = 4x^3-16x = 4x(x-2)(x+2)$$

<u>Kritiske punkter</u> $\iff f'(x) = 0 \iff 4x(x-2)(x+2) = 0$

$$\iff \underline{x = 0,\ x = \pm 2}$$

Kritiske punkter er <u>kandidatpkt</u> for lokale max/min-pkter.

$$f''(x) = 4 \cdot 3x^2 - 16 = 4(3x^2 - 4)$$

$$f''(0) = -16 < 0$$

$$f''(-2) = f''(2) = 4(3 \cdot 2^2 - 4) = 4 \cdot 8 = 48 > 0$$

2. derivtesten sier da at $x = \pm 2$ begge er lokale minimumspkter, og $x = 0$ er lokalt maksimumspkt.

(Alternativt ved 1. derivert-testen.)

b)

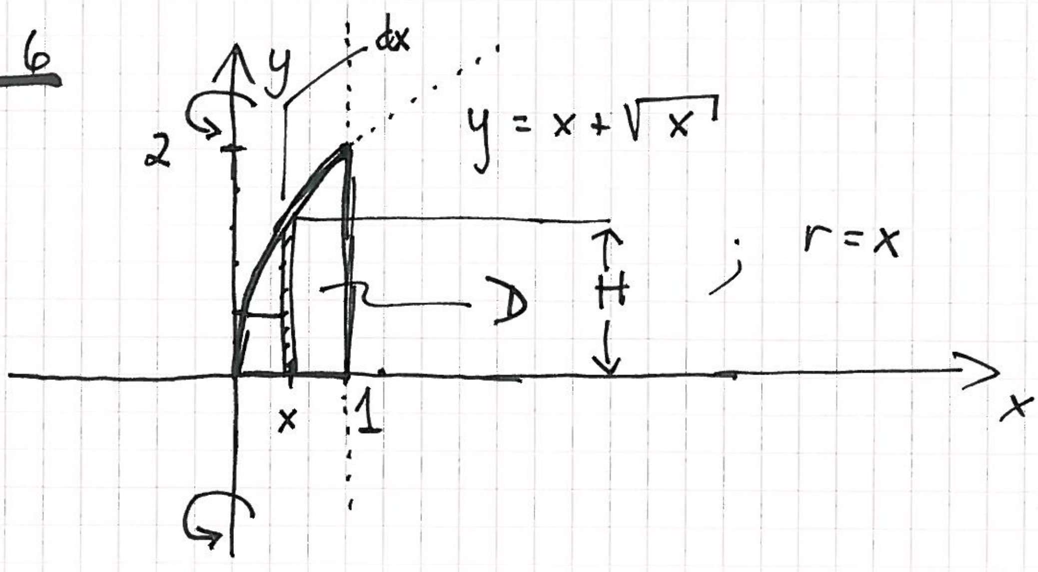
$$\lim_{x \to 1} \frac{2x^2 - (3x+1)\sqrt{x} + 2}{x-1} \quad ; \quad \frac{2 \cdot 1^2 - (3 \cdot 1 + 1)\sqrt{1} + 2}{1-1}$$

$$= \left[\frac{0}{0}\right] \to \text{l'Hôpitals}$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{2 \cdot 2x - \left(3 \cdot \sqrt{x} + (3x+1) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}\right) + 0}{1}$$

$$= \frac{4 - (3 + 4 \cdot \frac{1}{2})}{1} = \frac{-1}{1} = -1$$

oppgave 6



a)

$$\text{Areal } D = \int_0^1 (x + \sqrt{x})\,dx$$

$$= \left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{2}{3}x^{3/2}\right)\Big|_0^1$$

$$= \frac{1}{2}\cdot 1^2 + \frac{2}{3}1^{3/2} - 0 \quad = \underline{\underline{\frac{7}{6}}}$$

b) Volum omdreiningslegeme, sylinderskallmetoden:

$$V = \int_0^1 2\pi r H\,dx = \int_0^1 2\pi\, x(x + \sqrt{x})\,dx$$

$$= 2\pi \int_0^1 (x^2 + \overbrace{x\sqrt{x}}^{x^{3/2}})\,dx$$

$$= 2\pi\left(\frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{5}x^{5/2}\right)\Big|_0^1 = 2\pi\cdot\left(\frac{1}{3} + \frac{2}{5}\right)$$

$$= \underline{\underline{\frac{22\pi}{15}}}$$

Oppgave 7

a) Sirkel: $A = \pi r^2$, $O = 2\pi r$

Ved tid $t = t_1$: $\begin{cases} \bullet \; r = 4 \text{ cm} \\ \bullet \; \dfrac{dO}{dt} = 2 \text{ cm/min} \end{cases}$

Finn $\left.\dfrac{dA}{dt}\right|_{t=t_1} = ?$

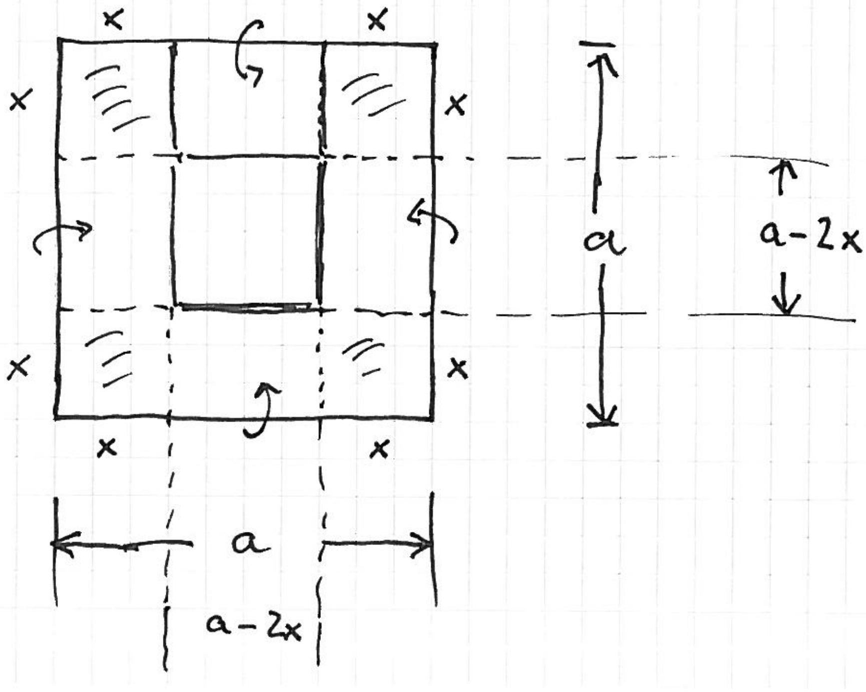
oppgitt

Har: $\underline{\dfrac{dO}{dt} = 2\pi \dfrac{dr}{dt} = 2}$;

Nå:

$$\frac{dA}{dt} = \pi \cdot 2r \frac{dr}{dt} = \underset{\substack{\uparrow \\ 4}}{r} \cdot \underbrace{2\pi \frac{dr}{dt}}_{\substack{\uparrow \\ 2}} = \underline{\underline{8 \text{ cm}^2/\text{min}}}$$

b)



→ Får boks med kvadratisk bunn med areal $(a-2x)^2$, og høyde x $\Rightarrow$

$$\underline{V = x(a-2x)^2}, \quad x \in \left[0, \frac{a}{2}\right]$$

Når V er maximal må $\frac{dV}{dx} = 0$:

$$V' = 1\cdot(a-2x)^2 + x\cdot 2(a-2x)\cdot(-2) = 0$$

Faktoriser $a-2x$ utenfor :

$$(a-2x)[a-2x-4x] = 0$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{a-2x=0}_{\Downarrow} \quad \text{eller} \quad \underbrace{a-6x=0}_{\Downarrow}$$

$x = \frac{a}{2}$ gir $\underline{V=0}$

$\Rightarrow$ $a-6x=0$, dvs $\underline{\underline{x=\frac{a}{6} \text{ må gi } V_{max}}}$:

[$x=\frac{a}{6}$ gir

$$V_{max} = \frac{a}{6}\left(a - 2\cdot\frac{a}{6}\right)^2$$

$$= \frac{a}{6}\cdot\left(\frac{2a}{3}\right)^2 = \underline{\underline{\frac{2a^3}{27}}}$$]