MAT100 UiS, 11/12-2013

Løsningsforslag

Martin G. Gulbrandsen

Oppgave 1

a) $w = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}\,i$

$$w + \frac{1}{w} = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}\,i\right) + \frac{1}{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}\,i}$$

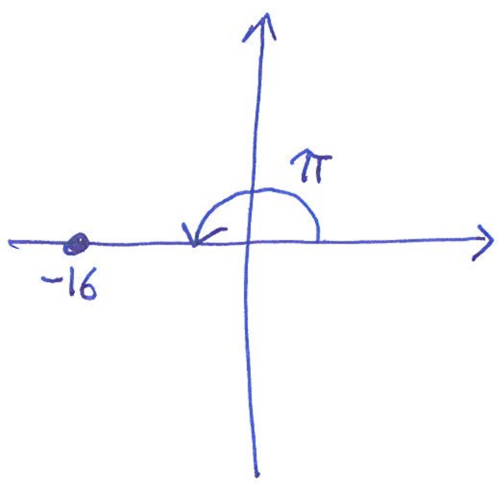
$$= \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}\,i\right) + \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3}\,i}{\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}\,i\right)\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3}\,i\right)}$$

$$= \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}\,i\right) + \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3}\,i}{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}\,i + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3}\,i$$

$$= \underline{1}$$

b)



-16 har modulus 16 og argument π

Så fjerderøttene til -16 har modulus $\sqrt[4]{16} = 2$ og argument

$\frac{\pi + 2\pi k}{4}$ for $k = 0, 1, 2, 3$.

Altså:

$$(k=0) \quad 2e^{\frac{\pi}{4}i} = 2\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

$$= 2\left(\tfrac{1}{2}\sqrt{2} + i\cdot\tfrac{1}{2}\sqrt{2}\right)$$

$$= \underline{\sqrt{2} + \sqrt{2}\,i}$$

$$(k=1) \quad 2e^{\frac{3\pi}{4}i} = 2\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$$

$$= \underline{-\sqrt{2} + \sqrt{2}\,i}$$

$$(k=2) \quad 2e^{\frac{5\pi}{4}i} = 2\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right)$$

$$= \underline{-\sqrt{2} - \sqrt{2}\,i}$$

$$(k=3) \quad 2e^{\frac{7\pi}{4}i} = 2\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right)$$

$$= \underline{\sqrt{2} - \sqrt{2}\,i}$$

Oppgave 2

a) $$y' = 2\sqrt{y}\cos x$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{1}{2\sqrt{y}}\, y' = \cos x \qquad (\text{eller } \underline{y=0})$$

Denne er separabel.

$$\int \frac{1}{2\sqrt{y}}\, y'\,dx = \int \cos x\,dx$$

$$\int \frac{1}{2\sqrt{y}}\,dy = \int \cos x\,dx$$

$$\sqrt{y} = \sin x + C$$

$$\underline{y = (\sin x + C)^2}$$

b) $$y'' + y = 0$$

Finner først generell løsning.
Denne er annenordens lineær homogen med konstante koeffisienter.
Karakteristisk ligning:

$$r^2 + 1 = 0$$

$$r = \pm i$$

Realdel 0 og imaginærdel 1 innsatt i løsningsformelen:

$$y(x) = e^{0\cdot x}(A\cos(1\cdot x) + B\sin(1\cdot x))$$

$$= A\cos x + B\sin x$$

Initialbetingelser

$y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$

Må kjenne $y'(x)$:

$$y'(x) = -A\sin x + B\cos x$$

$$y(0) = A\cos 0 + B\sin 0 = A$$

$$y'(0) = -A\sin 0 + B\cos 0 = B$$

Initialbetingelsene er oppfylt når $A=0$ og $B=1$, så løsning:

$$\underline{y(x) = \sin x}$$

Oppgave 3

a) $$I = \int \frac{\sin x}{\cos^2 x}\,dx$$

Substitusjon:

$$u = \cos x \Rightarrow \frac{du}{dx} = -\sin x$$

$$I = \int \left(-\frac{1}{u^2}\right)\frac{du}{dx}\,dx$$

$$= -\int \frac{1}{u^2}\,du$$

$$= -\int u^{-2}\,du$$

$$= u^{-1} + C$$

$$= \underline{\frac{1}{\cos x} + C}$$

b) $$I = \int (x+1)\ln x\,dx$$

Delvis integrasjon:

$$u = \ln x \qquad u' = \frac{1}{x}$$

$$v' = x+1 \qquad v = \frac{1}{2}x^2 + x$$

$$I = \int u v' \, dx$$

$$= uv - \int u' v \, dx$$

$$= \left(\tfrac{1}{2}x^2 + x\right)\ln x - \int \tfrac{1}{x}\left(\tfrac{1}{2}x^2 + x\right) dx$$

$$= \left(\tfrac{1}{2}x^2 + x\right)\ln x - \int \left(\tfrac{1}{2}x + 1\right) dx$$

$$= \left(\tfrac{1}{2}x^2 + x\right)\ln x - \left(\tfrac{1}{4}x^2 + x\right) + C$$

Oppgave 4

$f(x) = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}\ln x \qquad (x > 0)$

a) Avgjør stigning ved å se på fortegnet til den deriverte:

$$f'(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x}$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x}(x^2 - 1)$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2x}}\underbrace{(x+1)}(x-1)$$

positive når $x > 0$

Så $f'(x) > 0$ for $x > 1$,
$f'(x) < 0$ for $x < 1$
og $f'(1) = 0$

Grafen vokser på $[1, \infty)$
og avtar på $(0, 1)$.

Avgjør konkavitet ved å se på fortegnet til den andrederiverte.

$$f''(x) = \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{x}\right)'$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) > 0$$

Alltid positiv, så grafen er <u>konkav opp</u> på hele definisjonsmengden $(0, \infty)$.

b)

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \Big(\underbrace{\tfrac{1}{4}x^2}_{\text{Går mot } 0} - \tfrac{1}{2}\underbrace{\ln x}_{\text{Går mot } -\infty}\Big)$$

$$= \underline{\infty}$$

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}\ln x\right)$$

Dette er et "$\infty - \infty$"-uttrykk. Kan skrives om slik:

$$\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}\ln x = \frac{1}{4}x^2\left(1 - \frac{2\ln x}{x^2}\right)$$

Når $x \to \infty$ er $\frac{2\ln x}{x^2}$ et "$\frac{\infty}{\infty}$"-uttrykk og l'Hôpital gir:

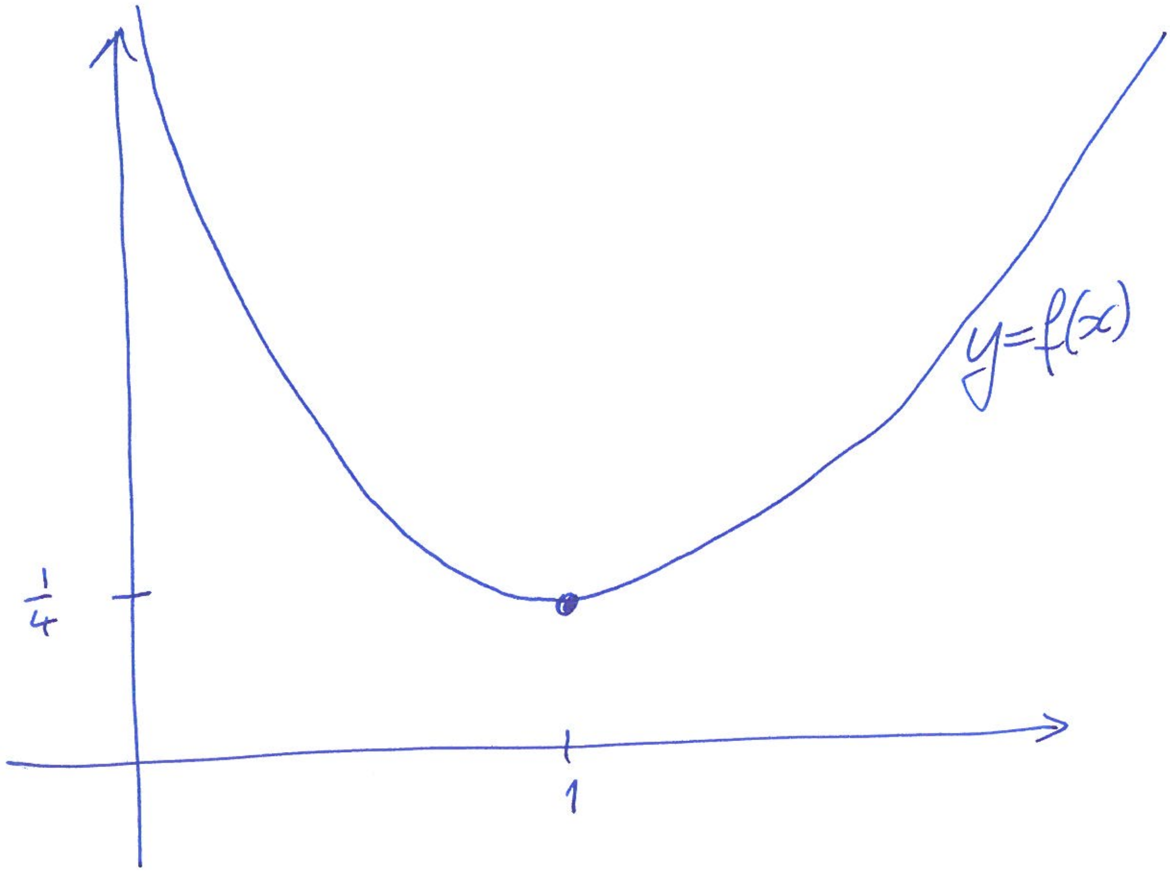
$$\lim_{x \to \infty} \frac{2\ln x}{x^2} = \lim_{x \to \infty} \frac{2/x}{2x} = 0$$

Derfor:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \underbrace{\tfrac{1}{4}x^2}_{\text{går mot } \infty}\underbrace{\left(1 - \frac{2\ln x}{x^2}\right)}_{\text{går mot } 1}$$

$$= \underline{\infty}.$$

c)



d) Buelengden er $s = \int_1^2 \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx$.

$$f'(x) = \left(\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}\ln x\right)'$$
$$= \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{x}\right)$$

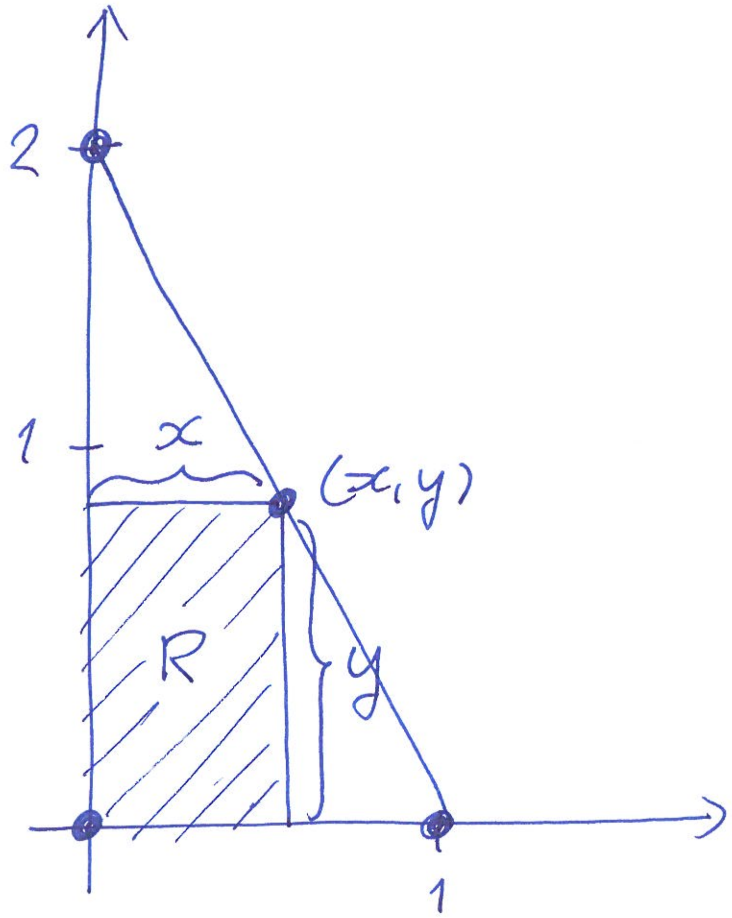
$$f'(x)^2 = \frac{1}{4}\left(x^2 - 2 + \frac{1}{x^2}\right)$$

$$1 + f'(x)^2 = \frac{4}{4} + \frac{1}{4}\left(x^2 - 2 + \frac{1}{x^2}\right)$$
$$= \frac{1}{4}\left(x^2 + 2 + \frac{1}{x^2}\right)$$
$$= \frac{1}{4}\left(x + \frac{1}{x}\right)^2$$

$$s = \int_1^2 \sqrt{\frac{1}{4}\left(x + \frac{1}{x}\right)^2}\, dx$$
$$= \frac{1}{2}\int_1^2 \left(x + \frac{1}{x}\right) dx$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}x^2 + \ln x\right)\Big|_1^2$$
$$= \frac{1}{2}(2 + \ln 2) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + 0\right)$$
$$= \underline{\frac{3}{4} + \frac{1}{2}\ln 2}$$

Oppgave 5

a)



Linjen gjennom (1,0) og (0,2) har ligning

$$y = -2x + 2.$$

Rektangelet R har sidekanter x og y som oppfyller ligningen over, så arealet er

$$xy = x(-2x+2)$$
$$= \underline{2x(x-1)}.$$

b) Sidekanten x ligger mellom 0 og 1. Maks-min-teoremet garanterer at arealfunksjonen

$$f(x) = 2x(1-x)$$

(som er kontinuerlig) har maks- og min-punkter på det lukkede, begrensede intervallet $[0,1]$. I endepunktene $x=0$ og $x=1$ er arealet 0; dette er minima. Siden f er deriverbar over alt gjenstår bare kritiske punkter som kandidater til ekstremalpunkter:

$$f'(x) = (2x - 2x^2)'$$

$$= 2 - 4x$$

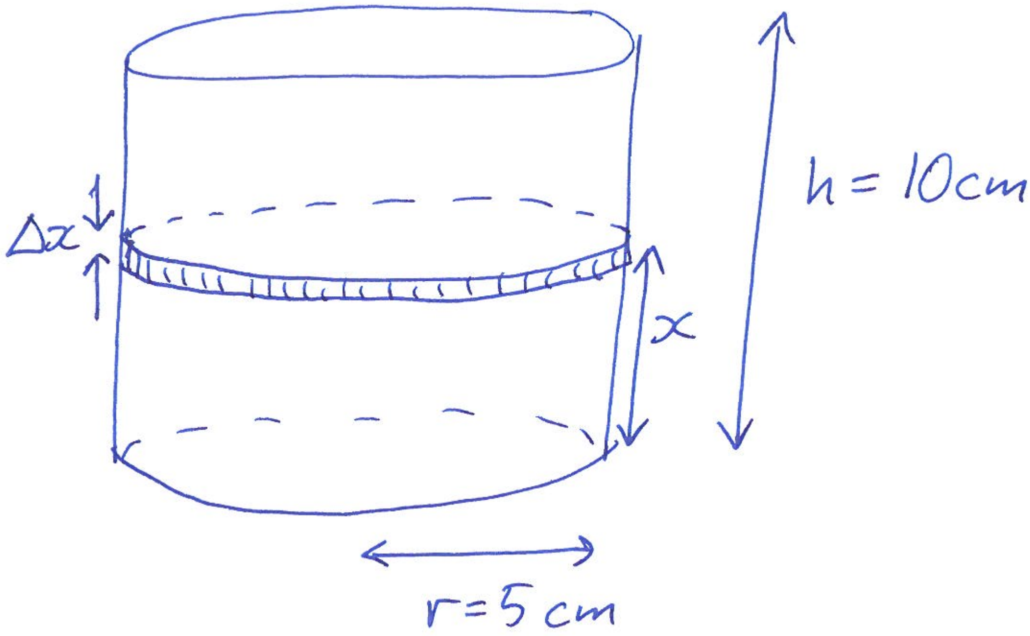
$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$$

Fant kun én kandidat; dette må dermed være maks-punktet. Tilhørende y-verdi:

$$y = (-2x+2)\Big|_{x=\frac{1}{2}} = 1.$$

Så $(x,y) = \underline{(\tfrac{1}{2}, 1)}$.

Oppgave 6



Et horisontalt skikt i høyde x med tykkelse Δx har volum

$$\Delta V = \pi r^2 \Delta x$$

og saltinnhold (masse)

$$\Delta m \approx \pi r^2 c(x) \Delta x.$$

For en valgt partisjon

$$0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = h$$

blir det ~~totale~~ saltinnholdet tilnærmet lik Riemannsummen

$$m \approx \sum_{i=1}^{n} \pi r^2 c(x_i) \Delta x_i$$

der $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$.

I grensen når alle $\Delta x_i \to 0$ får vi integralet:

$$m = \int_0^{10} \pi r^2 c(x)\,dx$$

$$= 10\pi r^2 \int_0^{10} \frac{1}{x+1}\,dx$$

Substitusjon med

$$u = x+1, \quad \frac{du}{dx} = 1$$

gir:

$$m = 10\pi r^2 \int_1^{11} \frac{1}{u}\,du$$

$$= 10\pi r^2 (\ln u)\Big|_1^{11}$$

$$= 10\pi r^2 (\ln 11 - 0)$$

$$= \underline{250\pi \ln 11} \quad (\approx 1883)$$