Universitetet i Stavanger

Det Teknisk-Naturvitenskapelige Fakultet

Eksamen i	MAT100 Matematiske metoder 1
Dato:	11. desember, 2013
Tid:	9:00-14:00
Vedlegg:	Formelark (1 side)

Tillatte hjelpemidler:
K. Rottmann: *Matematisk formelsamling.*
Enkel bestemt kalkulator.

Oppgavesettet består av 6 oppgaver på 3 sider.

Alle svar skal begrunnes. Vis tydelig alle utregninger.

Oppgave 1

a) La $w = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}i$. Regn ut $w + \frac{1}{w}$.

b) Finn alle komplekse fjerderøtter til -16. Skriv svaret på kartesisk form (det vil si på formen $a + bi$).

Oppgave 2

a) Finn den generelle løsningen av differensialligningen:

$$y' = 2\sqrt{y}\cos x$$

b) Løs initialverdiproblemet:

$$y'' + y = 0, \quad y(0) = 0, y'(0) = 1$$

Oppgave 3

Regn ut integralene.

a) $\displaystyle\int \frac{\sin x}{\cos^2 x}\, dx$

b) $\displaystyle\int (x+1)\ln x \; dx \qquad (\text{for } x > 0)$

Oppgave 4

La

$$f(x) = \tfrac{1}{4}x^2 - \tfrac{1}{2}\ln x$$

som er definert for $x > 0$.

a) Bestem intervallene hvor f er voksende (increasing) og avtakende (decreasing). Bestem også intervallene hvor f er konkav opp eller konkav ned.

b) Bestem $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} f(x)$ og $\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x)$.

c) Skisser grafen til f.

d) Finn buelengden (arc length) til den delen av grafen til f som ligger over $x \in [1, 2]$.

Oppgave 5

La T være trekanten i xy-planet med hjørner i $(0, 0)$, $(1, 0)$ og $(0, 2)$. Til ethvert punkt (x, y) på trekantens hypotenus kan vi danne et rektangel R med hjørner i $(0, 0)$, $(x, 0)$, $(0, y)$ og (x, y).

a) Tegn trekanten T med et eksempel på et slikt rektangel R. Vis at arealet til R er $f(x) = 2x(1 - x)$.

b) Bestem (x, y) slik at arealet til R blir størst mulig.

Oppgave 6

En beholder er fylt med saltvann. Beholderen har form som en vertikal sylinder, med radius 5 cm og høyde 10 cm. Saltet i løsningen er ulikt fordelt: Saltkonsentrasjonen nære bunnen er høyere enn nære overflaten. I avstand x cm fra bunnen er saltkonsentrasjonen

$$c(x) = \frac{10}{x+1}$$

målt i mg/cm^3. Det betyr at en bitteliten væskeprøve med volum ΔV, i avstand x fra bunnen, inneholder tilnærmet lik $c(x)\Delta V$ milligram salt, og tilnærmingen blir stadig bedre når ΔV avtar.

Bestem det totale saltinnholdet (målt i milligram) i væsken. Vær nøye med å forklare hvordan du resonnerer.