MAT100 UiS, 22/2-2014
Løsningsforslag

Martin G. Gulbrandsen

Oppgave 1

a) $z = 1 + i$

Modulus: $r = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

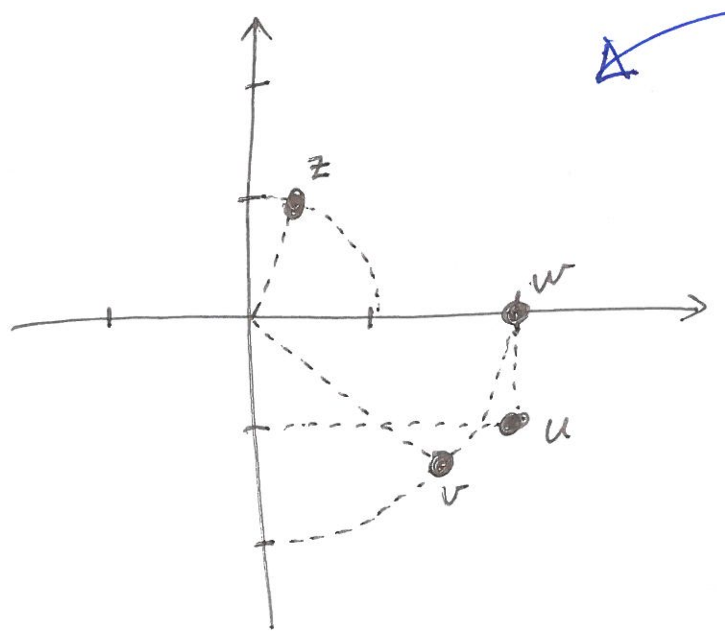
Argument θ: Oppfyller $\tan\theta = \frac{1}{1} = 1$ og ligger i 1. kvadrant $\Rightarrow \theta = \pi/4$.

$$\underline{z = \sqrt{2}\, e^{\frac{\pi}{4} i}}$$

b) $1 + i + i^2 + i^3$

$= 1 + i - 1 - i = \underline{0}$

c)



(Her spiller det liten rolle hva som er tegnet inn av hjelpelinjer etc., det viktige er at punktene, evt. vektorene, er riktig plassert.)

Oppgave 2

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{for } x < 0 \\ x & \text{for } x \geq 0 \end{cases}$$

a) Sjekker om $\lim_{x \to 0} f(x)$ finnes og er lik $f(0)$.

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} x = 0$$

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} 0 = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 0} f(x) = 0$$

Siden også $f(0) = 0$ er f kontinuerlig i $x = 0$.

b) Må undersøke om grensen

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(h)}{h}$$

finnes.

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(h)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{h}{h} = 1$$

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{f(h)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{0}{h} = 0$$

De ensidige grensene er forskjellige, så grensen finnes ikke og f er <u>ikke deriverbar</u> i $x=0$.

<u>Oppgave 3</u>

$$f(x) = x^3 - 3x^2$$

a) f er deriverbar over alt. Kritiske punkter er der $f'(x)=0$.

$$f'(x) = 3x^2 - 6x$$
$$= 3x(x-2)$$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \underline{x=0}$ eller $\underline{x=2}$

Andrederivert-testen:

$$f''(x) = 6x - 6$$

$f''(0) = -6 < 0 \Rightarrow x=0$ er <u>lokalt maksimum</u>

$f''(2) = 6 > 0 \Rightarrow x=2$ er <u>lokalt minimum</u>

b) $f''(x) = 6(x-1)$, så:

$$f''(x) > 0 \iff x > 1$$
$$f''(x) < 0 \iff x < 1$$

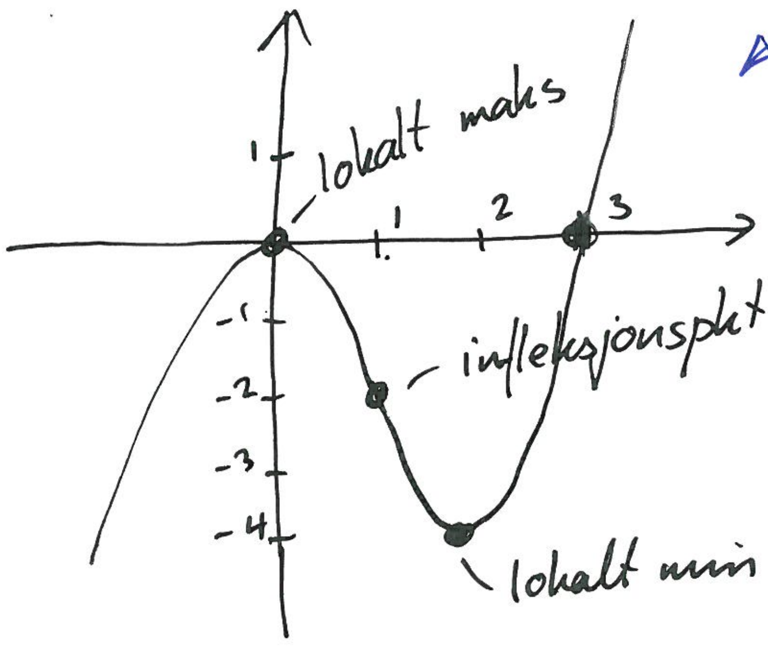
f er <u>konkav opp</u> på $[1, \infty)$

f er <u>konkav ned</u> på $(-\infty, 1]$.

c) Funksjonsverdiene i de kritiske punktene:

$$f(0) = 0^3 - 3 \cdot 0^2 = 0$$
$$f(2) = 2^3 - 3 \cdot 2^2 = -4$$

Vi kan også merke seg at $x = 1$ $(f(1) = 1^3 - 3 \cdot 1^2 = -2)$ er et infleksjonspunkt og at grafen skjærer x-aksen $(f(x) = 0)$ i $x = 0$ og $x = 3$.



(Her bør det være tydelig at figuren stemmer med det du har funnet ut i del (a) og (b).)

Oppgave 4

a) Løser ligningen $y = e^{2x} - 1$ med hensyn på x:

$$y = e^{2x} - 1 \Leftrightarrow y + 1 = e^{2x}$$
$$\Leftrightarrow \ln(y+1) = 2x$$
$$\Leftrightarrow \tfrac{1}{2}\ln(y+1) = x$$

Den inverse funksjonen er

$$\underline{f^{-1}(y) = \tfrac{1}{2}\ln(y+1)}$$

(med definisjonsmengde $(-1, \infty)$.)

b) Ved analysens fundamentalteorem er

$$\underline{g'(x) = e^{x^2}}.$$

Dermed er $g'(x) > 0$, så g er voksende og derfor en-til-en. Da eksisterer den inverse $h(y)$.

Når $x = h(y)$, $y = g(x)$, gjelder

$$h'(y) = \frac{1}{g'(x)}.$$

Siden

$$g(0) = \int_0^0 e^{t^2}\,dt = 0$$

har vi $h(0)=0$ og

$$h'(0) = \frac{1}{g'(0)} = \frac{1}{e^{0^2}} = \underline{1}.$$

Oppgave 5

a) $$I = \int \frac{\ln x}{x}\,dx, \quad x>0.$$

Substitusjon med $u=\ln x$ gir

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{x},$$

så

$$I = \int \ln x \cdot \frac{1}{x}\,dx$$

$$= \int u\,du$$

$$= \frac{1}{2}u^2 + C$$

$$= \underline{\frac{1}{2}(\ln x)^2 + C}$$

b) $$I = \int e^{\sqrt{x}}\,dx, \quad x>0$$

Substitusjon med $w=\sqrt{x}$ gir

$$\frac{dw}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

$$I = \int e^{\sqrt{x}} \cdot 2\sqrt{x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}\, dx$$

$$= 2\int e^{w} \cdot w\, dw$$

Løser det gjenværende integralet ved delvis integrasjon:

$$u = w \qquad u' = 1$$
$$v' = e^{w} \qquad v = e^{w}$$

$$\int e^{w} w\, dw = w e^{w} - \int 1 \cdot e^{w}\, dw$$

$$= e^{w}(w-1) + C'$$

$$\Rightarrow I = 2e^{w}(w-1) + C \qquad (C = 2C')$$

$$= \underline{2e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x}-1) + C}$$

c) $$\int_0^\infty \frac{1}{e^{x}}\, dx = \lim_{t\to\infty} \int_0^t e^{-x}\, dx$$

$$= \lim_{t\to\infty} \left(-e^{-x}\right)\Big|_0^t$$

$$= \lim_{t\to\infty} \Big(-\underbrace{e^{-t}}_{\text{går mot } 0} + \underbrace{e^{0}}_{1}\Big) = \underline{1}$$

Oppgave 6

Temperaturen som funksjon av tiden: $T(t)$
Newtens avkjølingslov:

$$T'(t) = k(T(t) - T_0)$$

Med $T_0 = 0$:

$$T'(t) = kT(t)$$

Denne differensialligningen har generell løsning

$$T(t) = Ce^{kt}.$$

Første måling ved $t=0$:

$$T(0) = Ce^0 = C$$

Så $C = 90$ (når vi måler T i °C).
Andre måling ved $t = 10$ (minutter):

$$T(10) = 90e^{10k}$$

Betingelsen $T(10) = 60$ gir:

$$90e^{10k} = 60$$

$$e^{10k} = \frac{60}{90} = \frac{2}{3}$$

$$10k = \ln\left(\frac{2}{3}\right)$$

$$k = \frac{1}{10}\ln\left(\frac{2}{3}\right) \approx -0{,}0405$$

Temperaturen lik 30°C:

$$T(t) = 30$$

$$90e^{kt} = 30$$

$$e^{kt} = \frac{30}{90} = \frac{1}{3}$$

$$kt = \ln\left(\frac{1}{3}\right)$$

$$t = \frac{\ln\left(\frac{1}{3}\right)}{k} \approx 27{,}1$$

Altså: <u>27,1 minutter</u>.