Eksamen i MAT100 12/12 - 2014, UiS
Løsningsforslag Martin G. Gulbrandsen

Oppgave 1

a) $z = 8e^{\frac{\pi}{3}i}$

$= 8\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

$= 8\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}\, i\right)$

$= \underline{4 + 4\sqrt{3}\, i}$

$w = 2 - 2i$ har modulus

$r = \sqrt{2^2 + (-2)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

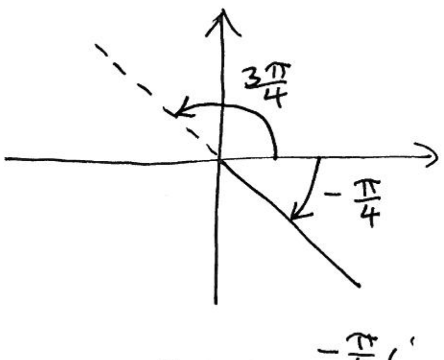
og argumentet θ oppfyller

$\tan\theta = \frac{-2}{2} = -1.$

Siden

$\tan^{-1}(-1) = -\tan^{-1}(1) = -\frac{\pi}{4}$

er enten $\theta = -\frac{\pi}{4}$ eller $\theta = -\frac{\pi}{4} + \pi = \frac{3\pi}{4}$ (evt. $+2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$):



w har positiv realdel og negativ imaginærdel, altså er $\theta = -\frac{\pi}{4}$.

$w = \underline{2\sqrt{2}\, e^{-\frac{\pi}{4}i}}$

b) (1) $w^2 = (2-2i)^2$

$= 4 - 8i + 4i^2$

$= \underline{-8i}$

(1b forts.)

(2) $\frac{1}{w} = \frac{1}{2-2i} \cdot \frac{2+2i}{2+2i}$

$= \frac{2+2i}{4-4i^2}$

$= \underline{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}i}$

(3) $z\bar{z} = |z|^2 = 8^2 = \underline{64}$

c) Tredjerøttene til $z = 8e^{\frac{\pi}{3}i}$ har modulus

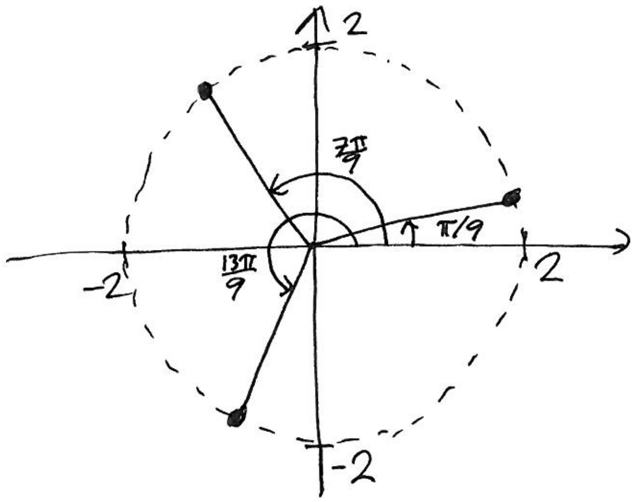
$\sqrt[3]{8} = 2$

og argument

$\frac{\pi/3 + 2\pi k}{3} = \frac{\pi + 6\pi k}{9}, \quad k \in \{0, 1, 2\}.$

Røttene er altså:

$\underline{2e^{\frac{\pi}{9}i}}, \quad \underline{2e^{\frac{7\pi}{9}i}}, \quad \underline{2e^{\frac{13\pi}{9}i}}$



Oppgave 2

a) $I = \int \frac{1}{x^2-4x+5}\,dx$

Nevneren er ufaktoriserbar ("b^2-4ac" $= -4 < 0$).
Kompletterer kvadratet:

$x^2 - 4x + 5 = (x-2)^2 + 1$

$$I = \int \frac{1}{(x-2)^2+1}\,dx$$

Substitusjon:
$u = x-2$
$du = dx$

$$= \int \frac{1}{u^2+1}\,du$$

$$= \tan^{-1} u + C$$

$$= \underline{\tan^{-1}(x-2) + C}$$

b) $$I = \int \frac{\sqrt{\tan^{-1} x}}{1+x^2}\,dx$$

Substitusjon:
$u = \tan^{-1} x, \quad du = \frac{1}{1+x^2}\,dx$

$$I = \int \sqrt{u}\,du$$

$$= \frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}} + C$$

$$= \underline{\frac{2}{3}(\tan^{-1} x)^{\frac{3}{2}} + C}$$

c) $$I = \int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2}\,dx = \int_{0}^{1} \frac{1}{x^2}\,dx + \int_{-1}^{0} \frac{1}{x^2}\,dx$$

er et uegentlig integral, siden $\frac{1}{x^2}$ ikke er definert i $x=0$.

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{a\to 0^+} \int_a^1 x^{-2}\,dx$$

$$= \lim_{a\to 0^+} \left(-x^{-1}\right)\Big|_a^1$$

$$= \lim_{a\to 0^+} \left(-1 + \frac{1}{a}\right) = \infty$$

Siden $\frac{1}{(-x)^2} = \frac{1}{x^2}$ er også $\int_{-1}^{0} \frac{1}{x^2}\,dx = \int_0^1 \frac{1}{x^2}\,dx = \infty$.

Til sammen er derfor $\underline{I = \infty}$, dvs integralet divergerer mot uendelig.

Oppgave 3

a) $y'' - 3y' + 2y = 0$

er en 2. ordens homogen lineær diffligning med konstante koeffisienter.

Karakteristisk ligning:

$$r^2 - 3r + 2 = 0$$

$$r = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2}$$

To reelle røtter $r_1 = 1$ og $r_2 = 2$.

Løsningsformel:

$$y = Ce^{r_1 x} + De^{r_2 x}$$

$$= Ce^{x} + De^{2x}$$

$$y' = Ce^{x} + 2De^{2x}$$

Initialbetingelser:

$$y(0) = C + D$$

$$y'(0) = C + 2D$$

Skal ha $y(0) = 0$, $y'(0) = -1$:

(1) $C + D = 0$

(2) $C + 2D = -1$

Ligning (2) minus ligning (1) gir $D = -1$, og da gir ligning (1) $C = 1$.

$$\underline{y = e^{x} - e^{2x}}$$

b) $y' = 2x e^{-y}$

er en 1. ordens separabel diffligning.

$$e^y dy = 2x\,dx$$

$$\int e^y dy = \int 2x\,dx$$

$$e^y = x^2 + C$$

$$y = \ln(x^2 + C)$$

Initialbetingelse:

$$y(0) = \ln C$$

Skal ha $y(0) = 0$:

$$\ln C = 0 \Rightarrow C = 1$$

$$\underline{y = \ln(x^2 + 1)}$$

Oppgave 4

a) $x + e^x = 0, \quad x \in [-1, 0]$

Venstre side i endepunktene:

$x = -1: \quad -1 + e^{-1} < 0$

$x = 0: \quad 0 + e^0 > 0$

Funksjonen $x + e^x$ er <u>kontinuerlig</u> og verdiene i $x=-1$ og $x=0$ har motsatte fortegn. Da sier <u>skjæringssetningen</u> at $x + e^x = 0$ for en $x \in (-1, 0)$, dvs en løsning finnes.

b) $f'(x) = 1 + e^x$ er positiv for alle $x \in \mathbb{R}$. Da er f <u>voksende</u> på hele $\mathbb{R}$.

Hvis x_1 og x_2 begge er løsninger av $x + e^x = 0$ er

$$f(x_1) = f(x_2) \qquad \text{(begge er 0).}$$

Siden f er voksende er f en-til-en, så

$$x_1 = x_2.$$

Altså kan det ikke finnes to forskjellige løsninger.

Oppgave 5

a) Kontinuitet i $x=1$:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1} 2x = 2$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1} (x^2 - 4x + 5) = 2$$

$$f(1) = 1^2 - 4\cdot 1 + 5 = 2$$

Disse er like, så $\lim_{x\to 1} f(x) = f(1)$, dvs f er <u>kontinuerlig</u> i $x=1$.

Deriverbarhet i $x=1$:

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2(1+h)-2}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{2h}{h} = 2$$

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(1+h)^2 - 4(1+h) + 5 - 2}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{h^2 - 2h}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} (h-2) = -2$$

Disse er ulike, så $\lim_{h \to 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h}$ finnes ikke, dvs. f er <u>ikke deriverbar</u> i $x=1$.

b) Siden f er en <u>kontinuerlig</u> funksjon definert på et <u>lukket</u> og <u>begrenset</u> intervall $[0, 2]$, sier maks/min-teoremet at det finnes absolutte maks og min. Disse må derfor være blant kandidatene til lokale maks/min:

- Endepunkter: $x=0$ og $x=2$
- Singulære punkter, der f ikke er deriverbar: $x=1$
- Kritiske punkter, der $f'(x)=0$:

  For $x<1$: $f'(x) = (2x)' = 2$, aldri 0

  For $x>1$: $f'(x) = (x^2-4x+5)' = 2x-4$, er 0 for $x=2$ (som var endepunktet)

Verdien i kandidatene:

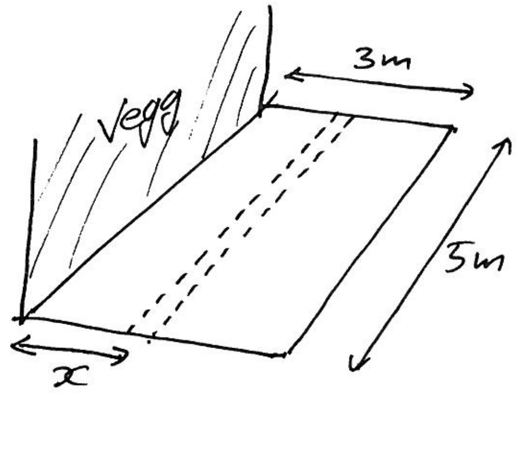
$x=0$: $f(0) = 2 \cdot 0 = 0$

$x=1$: $f(1) = 2$

$x=2$: $f(2) = 2^2 - 4 \cdot 2 + 5 = 1$

Absolutt maks: $\underline{f(1)=2}$; absolutt min: $\underline{f(0)=0}$.

<u>Oppgave 6</u>



$\frac{200}{x+2}$ $\frac{\text{tomater}}{m^2}$

Innenfor en tynn stripe som på figuren, med bredde Δx, er avstanden x til veggen tilnærmet konstant, og arealet til stripen er $5\Delta x$ (m^2). Antall tomater er tilnærmet

$$\frac{200}{x+2} \cdot 5\Delta x = \frac{1000}{x+2}\Delta x.$$

Velg en partisjon

$$0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = 3$$

og la $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. Når disse er små er det totale antallet tomater tilnærmet

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1000}{x_i+2} \Delta x_i .$$

Dette er en Riemannsum for funksjonen $\frac{1000}{x+2}$, så grensen når alle $\Delta x_i \to 0$ er det bestemte integralet

$$\int_0^3 \frac{1000}{x+2}\,dx$$

som derfor er et estimat for antallet tomater. Ved analysens fundamentalteorem kan dette regnes ut ved antiderivasjon:

$$\begin{aligned}\int_0^3 \frac{1000}{x+2}\,dx &= 1000 \ln(x+2)\Big|_0^3 \\ &= 1000(\ln 5 - \ln 2) \\ &= 1000 \ln \frac{5}{2} \\ &\approx \underline{916}.\end{aligned}$$