Universitetet i Stavanger

Det Teknisk-Naturvitenskapelige Fakultet

Eksamen i	MAT100 Matematiske metoder 1
Dato:	12. desember, 2014
Tid:	9:00-14:00
Vedlegg:	Formelark (1 side)
Fagansvarlig:	Martin G. Gulbrandsen
Telefonnummer:	51831808

Tillatte hjelpemidler:
K. Rottmann: *Matematisk formelsamling.*
Enkel bestemt kalkulator.

Oppgavesettet består av 6 oppgaver på 3 sider.

Alle svar skal begrunnes. Vis tydelig alle utregninger.

Oppgave 1

Vi skal se på to komplekse tall

$$z = 8e^{(\pi/3)i} \quad \text{og} \quad w = 2 - 2i.$$

a) Skriv z på kartesisk form. Skriv w på eksponentiell form.

b) Regn ut disse tre komplekse tallene:

$$(1) \quad w^2 \qquad\qquad (2) \quad \frac{1}{w} \qquad\qquad (3) \quad z\overline{z}$$

c) Finn alle komplekse tredjerøtter til z. Oppgi svarene på eksponentiell form. Tegn deretter en skisse som viser tredjerøttene du har funnet i det komplekse planet.

Oppgave 2

Regn ut integralene.

a) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2 - 4x + 5}\,dx$

b) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{\tan^{-1} x}}{1 + x^2}\,dx$

c) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2}\,dx$

Oppgave 3

Løs initialverdiproblemene.

a) $y'' - 3y' + 2y = 0, \quad y(0) = 0,\; y'(0) = -1$

b) $y' = 2xe^{-y}, \quad y(0) = 0$

Oppgave 4

a) Vis at ligningen

$$x + e^x = 0$$

har minst én løsning i intervallet $[-1, 0]$.

b) La $f(x) = x + e^x$ for $x \in \mathbb{R}$. Finn intervallene der f vokser ("increasing") eller avtar ("decreasing"). Bruk resultatet til å vise at ligningen i (a) har høyst én løsning (og dermed nøyaktig én løsning).

Oppgave 5

I denne oppgaven skal vi se på funksjonen

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{for } x < 1 \\ x^2 - 4x + 5 & \text{for } x \geq 1 \end{cases}$$

med definisjonsområde $D_f = [0, 2]$.

a) Avgjør om f er kontinuerlig i $x = 1$. Avgjør deretter om f er deriverbar i $x = 1$.

b) Finn alle absolutte (det vil si globale) maksimums- og minimumsverdier for f. Vær nøye med å forklare hvordan du resonnerer.

Oppgave 6

Gartneren Atle har en kjøkkenhage med tomater, formet som et 3 m $\times$ 5 m rektangel, der den lengste siden utgjøres av husveggen. Atle observerer at vekstforholdene er best innerst ved husveggen. Han gjør noen stikkprøver ved å telle antallet tomater innenfor noen kvadrater på 50 cm $\times$ 50 cm i ulike avstander fra veggen (Atle måler avstanden til veggen fra midten av kvadratet). I ett av kvadratene, 2 meter fra husveggen, fant Atle 12 tomater, og dermed

$$\begin{aligned}\frac{12 \text{ tomater}}{(0{,}50 \text{ m})^2} &= \frac{12}{0{,}25} \text{ tomater/m}^2 \\ &= 48 \text{ tomater/m}^2.\end{aligned}$$

Slik regner Atle ut antall tomater per kvadratmeter i alle stikkprøvene. Etter litt prøving og feiling finner Atle ut resultatene stemmer ganske godt med at det vokser

$$\frac{200}{x+2}$$

tomater per kvadratmeter, i avstand x meter fra husveggen. Atle mener dette må kunne brukes til å beregne omtrent hvor mange tomater han har totalt i kjøkkenhagen, men han vet ikke hvordan han skal gå frem.

Oppgaven er: Bruk analysens fundamentalteorem til å finne det totale antallet tomater. Vær nøye med å forklare hvordan du resonnerer.