Eksamen i MAT100 28/2 – 2015, UiS
Løsningsforslag Martin G. Gulbrandsen

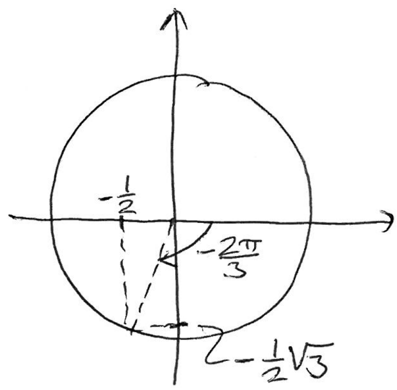
Oppgave 1

a) $u = (2+3i) - (1+2i)$
$= (2-1) + (3-2)i$
$= \underline{1+i}$

$v = (1-i)(3+i)$
$= 3 + i - 3i - i^2$
$= \underline{4-2i}$

$w = \dfrac{5i}{1-2i} = \dfrac{5i(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)}$
$= \dfrac{5i + 10i^2}{1^2 + 2^2}$
$= \dfrac{5i - 10}{5}$
$= \underline{-2+i}$

b) $z = e^{-\frac{2\pi}{3}i}$
$= \cos(-\frac{2\pi}{3}) + i\sin(-\frac{2\pi}{3})$
$= \underline{-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3}\, i}$



c) $-1 = e^{\pi i}$ har modulus 1 og argument π.
Tredjerøttene har modulus $\sqrt[3]{1} = 1$
og argument $\frac{\pi + 2\pi k}{3}$ for $k = 0, 1, 2$.
Altså:

$$\underline{e^{\frac{\pi}{3}i}}, \quad \underline{e^{\pi i}} \ (= -1), \quad \underline{e^{\frac{5\pi}{3}i}} \ (= e^{-\frac{\pi}{3}i})$$

Oppgave 2

a)
$$\int_{-\infty}^{0} e^x\,dx = \lim_{t \to -\infty} \int_t^0 e^x\,dx$$

$$= \lim_{t \to -\infty} \left[e^x\right]_t^0$$

$$= \lim_{t \to -\infty} (e^0 - e^t)$$

$$= e^0$$

$$= \underline{1}$$

b)
$$I = \int \frac{4x+3}{x^2+1}\,dx$$

Substitusjon $u = x^2+1$ gir
$du = 2x\,dx$.

$$I = \underbrace{\int \frac{4x}{x^2+1}\,dx}_{I_1} + \underbrace{\int \frac{3}{x^2+1}\,dx}_{I_2}$$

Regner ut I_1 ved hjelp av substitusjonen over:

$$I_1 = 2\int \frac{2x}{x^2+1}\,dx$$

$$= 2\int \frac{1}{u}\,du$$

$$= 2\ln|u| + C_1$$

$$= 2\ln(\underbrace{x^2+1}_{\text{positivt, derfor ingen absoluttverditegn}}) + C_1$$

I_2 kan regnes ut direkte:

$$I_2 = 3\int \frac{1}{x^2+1}\,dx$$

$$= 3\tan^{-1}(x) + C_2$$

Til sammen:

$$\underline{\underline{I = 2\ln(x^2+1) + 3\tan^{-1}(x) + C}}$$

c) $I = \int \frac{1}{(x^2+2x+2)^2}\,dx$

x^2+2x+2 kan ikke faktoriseres, siden

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{-2 \pm \sqrt{4-4\cdot 1\cdot 2}}{2\cdot 1}$$

ikke er reell.

Kompletterer kvadratet:

$$x^2+2x+2 = (x+1)^2+1$$

Substituer $u = x+1$: $du = dx$.

$$I = \int \frac{1}{(u^2+1)^2}\,du$$

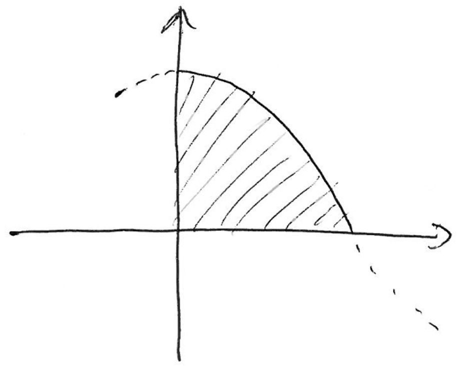
Setter inn i rekursjonsformelen på formelarket ($m=2$):

$$I = \frac{1}{2}\frac{u}{u^2+1} + \frac{1}{2}\int \frac{1}{u^2+1}\,du$$

$$= \frac{1}{2}\frac{u}{u^2+1} + \frac{1}{2}\tan^{-1}(u) + C$$

$$= \underline{\frac{1}{2}\frac{x+1}{x^2+2x+2} + \frac{1}{2}\tan^{-1}(x+1) + C}$$

Oppgave 3



$f(x) = \cos x$

$D_f = [0, \frac{\pi}{2}]$

$$V = \int_0^{\pi/2} 2\pi x f(x)\,dx$$

$$= 2\pi \int_0^{\pi/2} x \cos x \, dx$$

Delvis integrasjon:

$u = x \qquad u' = 1$

$v' = \cos x \qquad v = \sin x$

$$V = 2\pi \left(x \sin x \Big|_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \sin x\,dx \right)$$

$$= 2\pi \left(x \sin x + \cos x \right) \Big|_0^{\pi/2}$$

$$= 2\pi \left(\frac{\pi}{2} \sin \frac{\pi}{2} + \cos \frac{\pi}{2} - 0 \cdot \sin 0 - \cos 0 \right)$$

$$= 2\pi \left(\frac{\pi}{2} + 0 + 0 - 1 \right)$$

$$= \underline{\pi^2 - 2\pi}.$$

Oppgave 4

a) 1) $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x}$ "$\frac{0}{0}$"-uttrykk, bruker l'Hôpitals regel

$= \lim_{x \to 0} \frac{e^x}{1}$

$= \frac{e^0}{1}$

$= \underline{1}$

2) $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - x - 1}{x^2}$ "$\frac{0}{0}$"-uttrykk, bruker l'Hôpitals

$= \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{2x}$ "$\frac{0}{0}$" fortsatt, l'Hôpitals igjen

$= \lim_{x \to 0} \frac{e^x}{2}$

$= \frac{e^0}{2}$

$= \underline{\frac{1}{2}}$

b)

- $\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

fra forrige deloppgave

- $f(0) = 1$

Siden $\lim_{x \to 0} f(x) = f(0)$ er f <u>kontinuerlig</u> i $x = 0$.

c) Definisjonen av $f'(0)$:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\frac{e^h - 1}{h} - 1}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{e^h - h - 1}{h^2}$$

$$= \frac{1}{2}$$

fra forrige deloppgave.

At grenseverdien finnes betyr at f <u>er deriverbar</u> i $x = 0$.

Oppgave 5

Endringsraten er proporsjonal med $y(t)$:

$$y'(t) = k\,y(t), \quad k \text{ konstant.}$$

Generell løsning:

$$y(t) = C e^{kt}$$

Halveringstid 5730 år gir:

$$\frac{1}{2} y(0) = y(5730)$$

$$\frac{1}{2} C = C e^{k \cdot 5730}$$

$$\frac{1}{2} = e^{k \cdot 5730}$$

$$\ln \frac{1}{2} = k \cdot 5730$$

$$k = \frac{\ln \frac{1}{2}}{5730} = -\frac{\ln 2}{5730}$$

At 87% av nivået $y(0)$ gjenstår etter t år betyr

$$\frac{y(t)}{y(0)} = 0{,}87$$

$$\frac{C e^{kt}}{C} = 0{,}87$$

$$e^{kt} = 0,87$$

$$kt = \ln 0,87$$

$$t = \frac{\ln 0,87}{k}$$

$$= -\frac{5730 \ln 0,87}{\ln 2}$$

$$\approx 1151$$

Skipet er <u>1151</u> år gammelt (eller mer realistisk: rundt 1150 år).