Universitetet i Stavanger

EKSAMEN I: STA100 SANNSYNLIGHETSREGNING OG STATISTIKK 1

VARIGHET: 4 TIMER DATO: 12. SEPTEMBER 2013 BOKMÅL

TILLATTE HJELPEMIDLER:

KALKULATOR: **HP30S**, **Citizen SR-270X**, **Casio FX82** eller **TI-30**

OPPGAVESETTET BESTÅR AV 3 OPPGAVER PÅ 10 SIDER INKL. VEDLEGG

Oppgave 1

I en bedrift er antall produkter med feil i løpet av en dag fordelt som

x	0	1	2	3	4
$P(X = x)$	0.7	0.15	0.08	0.05	0.02

der X er antall produkter med feil på en dag.

Kostnaden pr. dag som funksjon av antall produkter med feil, x, er som gitt i tabellen under (kostnad i kroner).

x	0	1	2	3	4
K	0	80	90	100	110

La K være kostnaden en tilfeldig dag.
Vi antar at det er 252 dager med produksjon i i løpet av ett arbeidsår og at antall feilprodukter ulike dager er uavhengig av hverandre.

a) Finn $\mathrm{E}(X)$ og $\mathrm{Var}(X)$.
Vis at $\mathrm{E}(K) = 26.4$ og regn ut $\mathrm{Var}(K)$.

b) Regn ut sannsynligheten for at det blir minst ett produkt med feil i løpet av en arbeidsuke på fem arbeidsdager.
Regn ut sannsynligheten for at det blir akkurat ett produkt med feil i løpet av en arbeidsuke på fem arbeidsdager.

c) Hva er forventet kostnad som følge av produkter med feil i løpet av ett år?
Regn ut (tilnærmet) sannsynligheten for at den totale kostnaden som følge av produkter med feil i løpet av ett arbeidsår er mindre enn 8000 kroner.

Oppgave 2

Vi betrakter antall dager (døgn) med nedbør i løpet av november og desember, X. Som en forenklet modell for dette, skal vi anta at X er binomisk fordelt med $n = 61$ (antall dager i november og desember) og $p = 0.6$.

a) Hva er forventet antall nedbørsdøgn, E(X), og hva er standardavviket, SD(X)?
Hva er sannsynligheten for ingen nedbørsdøgn, $P(X = 0)$?
Finn (tilnærmet) sannsynligheten for minst 30 nedbørsdøgn, $P(X \geq 30)$.

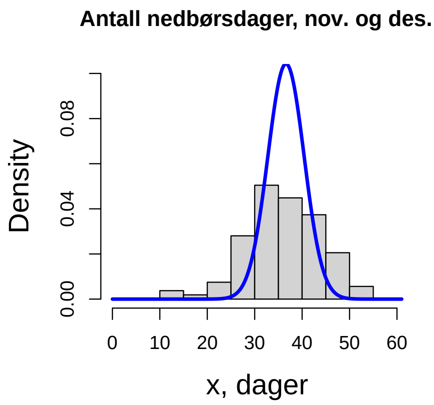
b) X kan skrives som $X = I_1 + I_2 + \cdots + I_{61}$ der $I_j = 1$ dersom det er regn døgn j og null ellers, og $P(I_j = 1) = p$ og $P(I_j = 0) = 1 - p$, $j = 1, \ldots, 61$.
Bruk dette til å vise at E$(X) = np$.
Vis også at Var$(X) = np(1 - p)$. Hva må du forutsette om I_j'ene utover det som er beskrevet over?

c) For å undersøke mulige klimaendringer vil man teste $H_0 : p = 0.6$ mot $H_1 : p > 0.6$.
Det er foreslått følgende framgangsmåte for testen: man kan hevde at forventet antall nedbørsdager har økt (hevde H_1) dersom man for et år observerer mer enn 41 dager med nedbør i november-desember.
Hvilket signifikansnivå har denne testen? Hva forteller signifikansnivået?
(Merk: ingen test skal gjennomføres; du skal bare finne signifikansnivået til testen som er beskrevet og forklare hva dette betyr.)

d) Lag en test med signifikansnivå 5% for å teste $H_0 : p = 0.6$ mot $H_1 : p > 0.6$ (samme hypoteser som i punkt c)).

e) Fordelingen til antall nedbørsdager i Bergen (i november-desember) i de 106 årene 1904 – 2010 er vist i histogrammet til høyre. Dataene har gjennomsnitt 36.4 og estimert standardavvik, $s = 7.94$.
Av i alt 6466 dager var det 3890 nedbørsdager; dvs. ca. 60%.

I samme figur er tettheten til X sin tilnærmede normalfordeling (forventning $61 \cdot 0.6 = 36.6$ og standardavvik $\sqrt{61 \cdot 0.6 \cdot (1 - 0.6)} = 3.83$) tegnet inn.

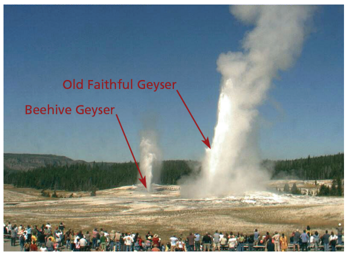


Beskriv hovedforskjellen mellom datafordelingen som histogrammet viser og den inntegnede normalfordelingen.
Hva kan årsaken til denne forskjellen være?

Dersom man skulle brukt testen foreslått i punkt c) for data fra Bergen, hva ville det betydd for det virkelige signifikansnivået til testen?

Oppgave 3

Old Faithful er en geysir i Yellowstone nasjonalpark i Wyoming, USA. Geysiren har utbrudd med en høy søyle av varmt vann og damp med ujevne mellomrom. For $n = 40$ utbrudd er det registrert varighet i sekund av utbruddet (x_1), tid i minutter mellom forrige og dette utbrudd (x_2), høyde i fot til vannsøylen til utbruddet (x_3) og tid i minutter mellom dette og neste utbrudd (y). Noen av dataene er vist i tabellen under.



Geysiren Old Faithful til høyre for den mindre Beehive.

i	y_i	x_{1i}	x_{2i}	x_{3i}
1	92	240	98	140
2	95	237	92	140
3	92	250	95	148
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
39	86	245	97	120
40	92	274	102	95

Man ønsker å etablere en modell som knytter sammen tid til neste utbrudd (y) med alle eller noen av de uavhengige (x-) variablene.

Et dataprogram brukes til å gjøre en multippel regresjonsanalyse av Y_i med hensyn til x_{1i}, x_{2i} og x_{3i}. Utskriften vises til høyre.

(Det kan reises innvendinger mot å gjøre en regresjonsanalyse av dette datasettet, men vi går ikke inn på dette i denne sammenhengen.)

```
> lm.1 <- lm( y ~ x.1 + x.2 + x.3 )
> anova(lm.1)
Analysis of Variance Table

Response: y
          Df  Sum Sq Mean Sq F value    Pr(>F)
x.1        1 1664.58 1664.58 35.6711 7.562e-07 ***
x.2        1  160.72  160.72  3.4441   0.07168 .
x.3        1   22.56   22.56  0.4834   0.49134
Residuals 36 1679.92   46.66
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
> summary(lm.1)

Call:
lm(formula = y ~ x.1 + x.2 + x.3)

Residuals:
    Min      1Q  Median      3Q     Max
-10.513  -4.816  -1.345   3.816  16.927

Coefficients:
            Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept) 73.79133   16.59563   4.446 8.04e-05 ***
x.1          0.18565    0.03030   6.126 4.71e-07 ***
x.2         -0.22070    0.11588  -1.905   0.0649 .
x.3         -0.05826    0.08380  -0.695   0.4913
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 6.831 on 36 degrees of freedom
Multiple R-squared: 0.5238,     Adjusted R-squared: 0.4841
F-statistic:  13.2 on 3 and 36 DF,  p-value: 5.739e-06
```

a) Still opp en multippel lineær regresjonsmodell for denne situasjonen. Skisser hvordan designmatrisen, $\boldsymbol{X}$, ser ut.
Hva er den estimerte regresjonslinjen når alle tre $x-$variable er med i modellen?
Gi en fortolking av sammenhengen mellom varighet av inneværende utbrudd (x_1) og tid til neste utbrudd.
Hva blir predikert tid til neste utbrudd dersom inneværende utbrudd varer 240 sekund, var 120 fot høyt og tiden mellom forrige utbrudd og dette var 90 minutt?

b) I modellen $\mathrm{E}(Y_i) = \beta_0 + \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + \beta_3 x_{3i}$, vil vi teste hvorvidt $\beta_j = 0$ eller ikke, for $j = 1, 2, 3$. Bruk utskriften til å gjennomføre disse tre testene; bruk 5% signifikansnivå. Hvilke forutsetninger bygger testene på?

En modell der kun varighet av inneværende utbrudd (x_1) er med i modellen er tilpasset dataene. Utskrift av analysen er vist til høyre.

```
> lm.2 <- lm( y ~ x.1 )
> anova(lm.2)
Analysis of Variance Table

Response: y
          Df Sum Sq Mean Sq F value    Pr(>F)
x.1        1 1664.6 1664.58  33.949 9.846e-07 ***
Residuals 38 1863.2   49.03
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
> summary(lm.2)

Call:
lm(formula = y ~ x.1)

Residuals:
    Min      1Q  Median      3Q     Max
-11.858  -3.979  -1.925   4.232  16.806

Coefficients:
            Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept) 47.39636    7.63719   6.206 2.97e-07 ***
x.1          0.17969    0.03084   5.827 9.85e-07 ***
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 7.002 on 38 degrees of freedom
Multiple R-squared: 0.4718,     Adjusted R-squared: 0.4579
F-statistic: 33.95 on 1 and 38 DF,  p-value: 9.846e-07
```

c) Vi vil predikere tiden til neste utbrudd når inneværende utbrudd varer 240 sekund. Dvs. vi vil predikere utfallet av $Y_0 = \beta_0 + \beta_1 x_{10} + \epsilon_0$, når $x_{10} = 240$.

Vi predikerer Y_0 med $\widehat{Y}_0 = \widehat{\beta}_0 + \widehat{\beta}_1 x_{10}$, der $\widehat{\beta}_0$ og $\widehat{\beta}_1$ er minstekvadratersestimatorene av β_0 og β_1, henholdsvis.
Prediksjonsfeilen er: $\widehat{Y}_0 - Y_0 = \widehat{\beta}_0 + \widehat{\beta}_1 x_{10} - Y_0$.

Vis at variansen til prediksjonsfeilen er gitt ved:

$$\mathrm{Var}(\widehat{\beta}_0 + \widehat{\beta}_1 x_{10} - Y_0) = \sigma^2 \Big\{ 1 + \frac{1}{n} + \frac{(x_{10} - \overline{x})^2}{S_{xx}} \Big\}.$$

(I utrykkene over er: $\overline{x} = 245.0$ = gjennomsnitt av x_{1i}'ene og $S_{xx} = \sum_{i=1}^{n} (x_{1i} - \overline{x})^2 = 51552.98$; $\sigma^2 = \mathrm{Var}(\epsilon_i)$ er variansen til feilleddet.)

Hjelp: Du kan utnytte at $\widehat{\beta}_0 + \widehat{\beta}_1 x_{10} = \overline{Y} - \widehat{\beta}_1 \overline{x} + \widehat{\beta}_1 x_{10} = \overline{Y} + (x_{10} - \overline{x})\,\widehat{\beta}_1$, og at $\overline{Y}$ og $\widehat{\beta}_1$ er statistisk uavhengige. Utrykket for $\widehat{\beta}_1$ kan du finne i formelsamlingen!

d) Beregn et 95% prediksjonsintervall for tiden til neste utbrudd.

- For dataene $x_1, \ldots, x_n$ er empirisk varians definert ved

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$$

- En oppgave består av d deler og det er m_1 ulike måter å utføre del 1 på, m_2 ulike måter å utføre del 2, m_3 ulike måter å utføre del 3 på o.s.v.; Det er da i alt $m_1 \cdot m_2 \cdots m_d$ ulike måter å utføre hele oppgaven på.

- Antall permutasjoner av s objekt tatt fra N ulike er:

$$\underbrace{N \cdot (N-1) \cdots (N-s+1)}_{s \text{ faktorer}}$$

- Antall uordnede utvalg av s objekt tatt fra N ulike er:

$$\begin{pmatrix} N \\ s \end{pmatrix} = \frac{N \cdot (N-1) \cdots (N-s+1)}{s!}$$

- Den betingede sannsynligheten for A gitt B er definert ved:

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

- For en tilfeldig variabel X er variansen til X definert ved:

$$\mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}\{(X-\mu)^2\} = \mathrm{E}(X^2) - \mu^2,$$

der $\mu = \mathrm{E}(X)$.

- For to tilfeldige variable X og Y er kovariansen til X og Y definert ved:

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathrm{E}\{(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)\} = \mathrm{E}(XY) - \mu_X\mu_Y,$$

der $\mu_X = \mathrm{E}(X)$ og $\mu_Y = \mathrm{E}(Y)$.

- For vilkårlige konstanter a, b og c og to tilfeldige variable X og Y gjelder:

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}(a + bX + cY) &= b^2\mathrm{Var}(X) + c^2\mathrm{Var}(Y) + 2bc\mathrm{Cov}(X,Y) \\ \mathrm{E}(a + bX + cY) &= a + b\mathrm{E}(X) + c\mathrm{E}(Y) \end{aligned}$$

- For vilkårlige konstanter a, b, c og d og to tilfeldige variable X og Y gjelder:

$$\mathrm{Cov}(a + bX, c + dY) = bd\mathrm{Cov}(X,Y)$$

- Dersom den tilfeldige variabelen X er binomisk fordelt (n,p), så har vi at

$$P(X = x) = \begin{pmatrix} n \\ x \end{pmatrix} p^x(1-p)^{n-x}, \qquad x = 0, 1, \ldots, n,$$

$\mathrm{E}(X) = np$ og $\mathrm{Var}(X) = np(1-p)$.

- Dersom den tilfeldige variabelen X er hypergeometrisk fordelt (N, M, n), der N = populasjonsstørrelse, M = antall defekte"og n = utvalgsstørrelse, så har vi at

$$P(X = x) = \frac{\binom{M}{x}\binom{N-M}{n-x}}{\binom{N}{n}}, \qquad x = 0, 1, \ldots, n$$

$\mathrm{E}(X) = n\frac{M}{N}$ og $\mathrm{Var}(X) = \frac{N-n}{N-1}n\frac{M}{N}(1 - \frac{M}{N})$.

- Dersom den tilfeldige variabelen X er geometrisk fordelt med suksess-sannsynlighet p, så har vi at

$$P(X = x) = (1-p)^{x-1}p \qquad x = 1, 2, \ldots,$$

$\mathrm{E}(X) = 1/p$ og $\mathrm{Var}(X) = (1-p)/p^2$.

- Dersom den tilfeldige variabelen X er Poissonfordelt med parameter λt, så har vi at

$$P(X = x) = \frac{(\lambda t)^x e^{-\lambda t}}{x!}, \qquad x = 0, 1, \ldots,$$

$\mathrm{E}(X) = \lambda t$ og $\mathrm{Var}(X) = \lambda t$.

- Den tilfelidige variabelen T er eksponesialfordelt med parameter λ dersom den har tettheten:

$$f(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t}, & \text{for } x > 0 \\ 0, & \text{for } x \leq 0 \end{cases}$$

Vi har da: $\mathrm{E}(T) = \frac{1}{\lambda}$, $\mathrm{Var}(T) = \frac{1}{\lambda^2}$ og $P(T < t) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda u} du = 1 - e^{-\lambda t}$.

- La $X_1, \ldots, X_n$ være uavhengige variable med samme fordeling og $\mathrm{E}(X_i) = \mu$ og $\mathrm{Var}(X_i) = \sigma^2$ for alle i. La $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i = \frac{1}{n}(X_1 + \cdots + X_n)$. **Sentralgrenseteoremet** gir da at når n er tilstrekkelig stor ($n \geq 30$ ofte ok) vil tilnærmet

$$Z = \frac{\overline{X} - \mathrm{E}(\overline{X})}{\sqrt{\mathrm{Var}(\overline{X})}} = \frac{\overline{X} - \mu}{\sqrt{\sigma^2/n}} \sim N(0, 1)$$

- Dersom $X_1, \ldots, X_n$ er uavhengige og identisk normalfordelte med forventning μ er

$$T = \frac{\overline{X} - \mu}{\sqrt{S^2/n}} \sim t_{n-1}$$

- **Lineærkombinasjoner**
La $Y = \sum_{i=1}^n a_i X_i + b$, der $X_1, \ldots, X_n$ er tilfeldige variable og b og $a_1, \ldots, a_n$ er konstanter. Da er

$$\mathrm{E}(Y) = \sum_{i=1}^n a_i \mathrm{E}(X_i) + b \text{ , og}$$
$$\mathrm{Var}(Y) = \sum_{i=1}^n a_i^2 \mathrm{Var}(X_i) + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1, j\neq i}^n a_i a_j \mathrm{Cov}(X_i, X_j)$$

Dersom X_i'ene er uavhengige og *normalfordelte*, $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i)$, vil $Y = \sum_{i=1}^n a_i X_i$ være *normalfordelt* med forventning $\mathrm{E}(Y) = \sum_{i=1}^n a_i \mu_i$ og varians $\mathrm{Var}(Y) = \sum_{i=1}^n a_i^2 \sigma_i^2$.

- χ^2- og fisherfordeling

  - Dersom U er χ^2_ν-fordelt, har vi at: $\mathrm{E}(U) = \nu$, og $\mathrm{Var}(U) = 2\nu$.
    Tallet $\chi_{\alpha,\nu}$ defineres ved at $P(U > \chi_{\alpha,\nu}) = \alpha$.
    Dersom $U_1 \sim \chi^2_{\nu_1}$ og $U_2 \sim \chi^2_{\nu_2}$, uavhengige, så $U_1 + U_2 \sim \chi^2_{(\nu_1+\nu_2)}$.
    Dersom $Z_i \sim N(0,1)$, $\ i = 1, \dots, n$, uavhengige, så $Z_1^2 + Z_2^2 + \cdots + Z_n^2 \sim \chi^2_n$.
  - Dersom $U \sim \chi^2_{\nu_1}$ og $V \sim \chi^2_{\nu_2}$ er to uavhengige tilfeldige variable, så er $F = \dfrac{U/\nu_1}{V/\nu_2} \sim F(\nu_1, \nu_2)$

    Fraktil: tallet f_{α,ν_1,ν_2} er slik at $P(F \geq f_{\alpha,\nu_1,\nu_2}) = \alpha$. Vi har at $f_{1-\alpha,\nu_1,\nu_2} = \dfrac{1}{f_{\alpha,\nu_2,\nu_1}}$

- **Resultater fra regresjonsanalyse**
  Modell for enkel lineær regresjonsanalyse: $Y_i = \alpha + \beta x_i + e_i$
  e_i'ene antas å være u.i.f. og normalfordelte med null forventning, $e_i \sim N(0, \sigma)$.

  Minstekvadrates estimator for α og β:

$$\widehat{\beta} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \overline{x}) Y_i}{\sum_{i=1}^n (x_i - \overline{x})^2} \qquad \text{og} \qquad \widehat{\alpha} = \overline{Y} - \widehat{\beta}\overline{x}$$

  Forventingsrett estimator for σ^2: $\widehat{\sigma}^2 = \dfrac{1}{n-2} \displaystyle\sum_{i=1}^n \Big\{ Y_i - (\widehat{\alpha} + \widehat{\beta} x_i) \Big\}^2 = \dfrac{SSE}{n-2}$

  Under forutsetning av at Y_i'ene er uavhengige og normalfordelte (som vil være tilfellet når e_i'ene er det), vil

$$\frac{(n-2)\,\widehat{\sigma}^2}{\sigma^2} = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n \Big\{ Y_i - (\widehat{\alpha} + \widehat{\beta} x_i) \Big\}^2 = \frac{SSE}{\sigma^2},$$

  være χ^2-fordelt med $\nu = n - 2$ frihetsgrader.

  Vi har at (under modellforutsetningene)

$$\frac{\widehat{\beta} - \beta}{\sqrt{\frac{S^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \overline{x})^2}}} \sim t(n-2) \qquad \text{og} \qquad \frac{\widehat{\alpha} - \alpha}{\sqrt{\frac{S^2 \sum_{i=1}^n x_i^2}{n \sum_{i=1}^n (x_i - \overline{x})^2}}} \sim t(n-2).$$

  Dersom n er stor, gjelder fordelingsresultatene over tilnærmet med $N(0,1)$-fordeling istedenfor t-fordelingen.

  Forventet verdi i punktet x_0, $\mu_{Y|x_0} = \mathrm{E}(Y|x_0) = \alpha + \beta x_0$, estimeres med: $\widehat{\mu}_{Y|x_0} = \widehat{\alpha} + \widehat{\beta} x_0$.
  Vi har:

$$\frac{\widehat{\mu}_{Y|x_0} - \mu_{Y|x_0}}{\sqrt{S^2 \Big\{ \frac{1}{n} + \frac{(x_0 - \overline{x})^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \overline{x})^2} \Big\}}} \sim t(n-2)$$

  Utfall av en ny verdi i punktet x_0, $Y_0 = \alpha + \beta x_0 + e_0$, estimeres med: $\widehat{\mu}_{Y|x_0} = \widehat{\alpha} + \widehat{\beta} x_0$.
  Vi har:

$$\frac{\widehat{\mu}_{Y|x_0} - Y_0}{\sqrt{S^2 \Big\{ 1 + \frac{1}{n} + \frac{(x_0 - \overline{x})^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \overline{x})^2} \Big\}}} \sim t(n-2)$$

- **Enveis variansanalyse**
  $Y_{i1}, Y_{i2}, \ldots, Y_{in_i}$: n_i målinger i gruppe nr. i, $i = 1, 2, \ldots, k$.
  Modell: $Y_{ij} = \mu_i + \epsilon_{ij}$, der ϵ_{ij}'ene er u.i.f., normalfordelte $\epsilon_{ij} \sim N(0, \sigma)$.
  Modell, alternativt: $Y_{ij} = \mu + \alpha_i + \epsilon_{ij}$.

  Da er $SSE = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n_i} (Y_{ij} - \overline{Y}_{i\cdot})^2$ og $SSA = \sum_{i=1}^{k} n_i (\overline{Y}_{i\cdot} - \overline{Y}_{\cdot\cdot})^2$ uavhengige tilfeldige variable, og $\dfrac{SSE}{\sigma^2}$ er χ^2-fordelt med $N - k$ frihetsgrader ($N = \sum_{i=1}^{k} n_i$).
  Dersom $\mu_1 = \mu_2 = \cdots = \mu_k$, vil $\dfrac{SSA}{\sigma^2}$ er χ^2-fordelt med $k-1$ frihetsgrader og $F = \dfrac{SSA/(k-1)}{SSE/(N-k)}$ er fisherfordelt med $k - 1$ og $N - k$ frihetsgrader.

Tabell over sannsynligheter i standardnormalfordelingen. Tabellen viser $P(Z \leq z)$, der $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$.

z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
-3.5	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002
-3.4	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0002
-3.3	0.0005	0.0005	0.0005	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0003
-3.2	0.0007	0.0007	0.0006	0.0006	0.0006	0.0006	0.0006	0.0005	0.0005	0.0005
-3.1	0.0010	0.0009	0.0009	0.0009	0.0008	0.0008	0.0008	0.0008	0.0007	0.0007
-3.0	0.0013	0.0013	0.0013	0.0012	0.0012	0.0011	0.0011	0.0011	0.0010	0.0010
-2.9	0.0019	0.0018	0.0018	0.0017	0.0016	0.0016	0.0015	0.0015	0.0014	0.0014
-2.8	0.0026	0.0025	0.0024	0.0023	0.0023	0.0022	0.0021	0.0021	0.0020	0.0019
-2.7	0.0035	0.0034	0.0033	0.0032	0.0031	0.0030	0.0029	0.0028	0.0027	0.0026
-2.6	0.0047	0.0045	0.0044	0.0043	0.0041	0.0040	0.0039	0.0038	0.0037	0.0036
-2.5	0.0062	0.0060	0.0059	0.0057	0.0055	0.0054	0.0052	0.0051	0.0049	0.0048
-2.4	0.0082	0.0080	0.0078	0.0075	0.0073	0.0071	0.0069	0.0068	0.0066	0.0064
-2.3	0.0107	0.0104	0.0102	0.0099	0.0096	0.0094	0.0091	0.0089	0.0087	0.0084
-2.2	0.0139	0.0136	0.0132	0.0129	0.0125	0.0122	0.0119	0.0116	0.0113	0.0110
-2.1	0.0179	0.0174	0.0170	0.0166	0.0162	0.0158	0.0154	0.0150	0.0146	0.0143
-2.0	0.0228	0.0222	0.0217	0.0212	0.0207	0.0202	0.0197	0.0192	0.0188	0.0183
-1.9	0.0287	0.0281	0.0274	0.0268	0.0262	0.0256	0.0250	0.0244	0.0239	0.0233
-1.8	0.0359	0.0351	0.0344	0.0336	0.0329	0.0322	0.0314	0.0307	0.0301	0.0294
-1.7	0.0446	0.0436	0.0427	0.0418	0.0409	0.0401	0.0392	0.0384	0.0375	0.0367
-1.6	0.0548	0.0537	0.0526	0.0516	0.0505	0.0495	0.0485	0.0475	0.0465	0.0455
-1.5	0.0668	0.0655	0.0643	0.0630	0.0618	0.0606	0.0594	0.0582	0.0571	0.0559
-1.4	0.0808	0.0793	0.0778	0.0764	0.0749	0.0735	0.0721	0.0708	0.0694	0.0681
-1.3	0.0968	0.0951	0.0934	0.0918	0.0901	0.0885	0.0869	0.0853	0.0838	0.0823
-1.2	0.1151	0.1131	0.1112	0.1093	0.1075	0.1056	0.1038	0.1020	0.1003	0.0985
-1.1	0.1357	0.1335	0.1314	0.1292	0.1271	0.1251	0.1230	0.1210	0.1190	0.1170
-1.0	0.1587	0.1562	0.1539	0.1515	0.1492	0.1469	0.1446	0.1423	0.1401	0.1379
-0.9	0.1841	0.1814	0.1788	0.1762	0.1736	0.1711	0.1685	0.1660	0.1635	0.1611
-0.8	0.2119	0.2090	0.2061	0.2033	0.2005	0.1977	0.1949	0.1922	0.1894	0.1867
-0.7	0.2420	0.2389	0.2358	0.2327	0.2297	0.2266	0.2236	0.2206	0.2177	0.2148
-0.6	0.2743	0.2709	0.2676	0.2643	0.2611	0.2578	0.2546	0.2514	0.2483	0.2451
-0.5	0.3085	0.3050	0.3015	0.2981	0.2946	0.2912	0.2877	0.2843	0.2810	0.2776
-0.4	0.3446	0.3409	0.3372	0.3336	0.3300	0.3264	0.3228	0.3192	0.3156	0.3121
-0.3	0.3821	0.3783	0.3745	0.3707	0.3669	0.3632	0.3594	0.3557	0.3520	0.3483
-0.2	0.4207	0.4168	0.4129	0.4090	0.4052	0.4013	0.3974	0.3936	0.3897	0.3859
-0.1	0.4602	0.4562	0.4522	0.4483	0.4443	0.4404	0.4364	0.4325	0.4286	0.4247
-0.0	0.5000	0.4960	0.4920	0.4880	0.4840	0.4801	0.4761	0.4721	0.4681	0.4641
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998

Tabell over Student-t-fordelingen. Tabellen viser $t_{\alpha,\nu}$ som er slik at $P(T \geq t_{\alpha,\nu}) = \alpha$, der $T \sim t(\nu)$ (T er Student-t-fordelt med ν frihetsgrader).

	α					
ν	0.25	0.10	0.05	0.025	0.01	0.005
1	1.000	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657
2	0.816	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925
3	0.765	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841
4	0.741	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604
5	0.727	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032
6	0.718	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707
7	0.711	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499
8	0.706	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355
9	0.703	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250
10	0.700	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169
11	0.697	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106
12	0.695	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055
13	0.694	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012
14	0.692	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977
15	0.691	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947
16	0.690	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921
17	0.689	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898
18	0.688	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878
19	0.688	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861
20	0.687	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845
21	0.686	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831
22	0.686	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819
23	0.685	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807
24	0.685	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797
25	0.684	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787
26	0.684	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779
27	0.684	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771
28	0.683	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763
29	0.683	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756
30	0.683	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750
36	0.681	1.306	1.688	2.028	2.434	2.719
38	0.681	1.304	1.686	2.024	2.429	2.712
40	0.681	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704
48	0.680	1.299	1.677	2.011	2.407	2.682
60	0.679	1.296	1.671	2.000	2.390	2.660
120	0.677	1.289	1.658	1.980	2.358	2.617
∞	0.674	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576