(Det tas forbehold om feil i løsningsforslaget.)

Oppgave 1

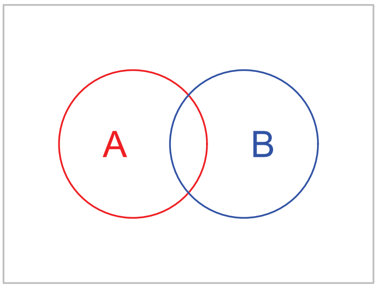
a) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.2 + 0.2 - 0.2 \cdot 0.2 = 0.36$
$P(A \cap B) = P(A)P(B) = 0.2 \cdot 0.2 = 0.04$, siden begivenhetene A og B er antatt uavhengige.
$P(A \cap \overline{C}) = P(A)(1 - P(C)) = 0.2 \cdot 0.8 = 0.16$

b) To begivenheter A og B er statistisk uavhengige dersom $P(A|B) = P(A)$.

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0.05}{0.2} = 0.25.$$

$$P(A|\overline{B}) = \frac{P(A \cap \overline{B})}{P(\overline{B})} = \frac{P(A \cap \overline{B})}{1 - P(B)}.$$

Vi trenger å finne $P(A \cap \overline{B})$. Men vi har at
$P(A) = P(A \cap \overline{B}) + P(A \cap B)$ (jf. figur tilhøyre), som gir at
$P(A \cap \overline{B}) = P(A) - P(A \cap B) = 0.2 - 0.05 = 0.15$.



Derfor: $P(A|\overline{B}) = \dfrac{0.15}{1 - 0.2} = 0.1875.$

Oppgave 2

a) X kan anta verdiene 0, 1 og 2. Sannsynlighetsfordeling:

x	0	1	2
$P(X = x)$	0.95	0.03	0.02

$\mathrm{E}(X) = 0 \cdot 0.95 + 1 \cdot 0.03 + 2 \cdot 0.02 = 0.07$
$\mathrm{E}(X^2) = 0^2 \cdot 0.95 + 1^2 \cdot 0.03 + 2^2 \cdot 0.02 = 0.11$
Da får vi : $\mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}(X^2) - \{\mathrm{E}(X)\}^2 = 0.11 - 0.07^2 = 0.105$

Forventet kostnad: $\mathrm{E}(20 + 15X) = 20 + 15\mathrm{E}(X) = 20 + 15 \cdot 0.07 = 21.05$
Varians til kostnad: $\mathrm{Var}(20 + 15X) = 15^2\mathrm{Var}(X) = 15^2 \cdot 0.105 = 23.625$

b) $Y_2 = X_1 + X_2$, og X_1 og X_2 er to uavhengige tilfeldige variable som begge har samme sannsynlighetsfordeling som X.
$\mathrm{E}(Y_2) = \mathrm{E}(X_1 + X_2) = \mathrm{E}(X_1) + \mathrm{E}(X_2) = 0.07 + 0.07 = 0.14$
$\mathrm{Var}(Y_2) = \mathrm{Var}(X_1 + X_2) = \mathrm{Var}(X_1) + \mathrm{Var}(X_2) = 0.105 + 0.105 = 0.21$

$\mathrm{E}(U) = \mathrm{E}(2X_1) = 2\mathrm{E}(X_1) = 2 \cdot 0.07 = 0.14$
$\mathrm{Var}(U) = \mathrm{Var}(2X_1) = 2^2\mathrm{Var}(X_1) = 2^2 \cdot 0.105 = 0.42$

Forventningen til Y_2 og forventningen til U er den samme mens variansene er ulike. Fordelingene er ulike: Y_2 kan ta verdier på 0, 1, 2, 3 og 4, mens U kan ta verdier på 0, 2 og 4 (men ikke 1 og 3). Variabelen Y_2 representerer samlet antall feil på to ulike enheter, mens U er det dobbelte av antall feil på en enhet.

c) La Y være antall feil på 200 enheter, dvs.: $Y = X_1 + X_2 + \cdots + X_{200}$, der $X_1, X_2, \ldots, X_{200}$ er 200 uavhengige tilfeldige variable som alle har samme fordeling som X.

Forventning til Y:
$\mathrm{E}(Y) = \mathrm{E}(X_1 + X_2 + \cdots + X_{200}) = \mathrm{E}(X_1) + \mathrm{E}(X_2) + \cdots + \mathrm{E}(X_{200}) = 200 \cdot 0.07 = 14$

Varians til Y:
$\mathrm{Var}(Y) = \mathrm{Var}(X_1 + X_2 + \cdots + X_{200}) = \mathrm{Var}(X_1) + \mathrm{Var}(X_2) + \cdots + \mathrm{Var}(X_{200}) = 200 \cdot 0.105 = 21.02$ (uavhengige variable, ingen kovarianser)
(Merk at å skrive: $\mathrm{Var}(Y) = \mathrm{Var}(200X)) = 200^2 \mathrm{Var}(X) = 200^2 \cdot 0.105 = \cdots$ er feil.)

Sentralgrenseteoremet sier at $Y = X_1 + X_2 + \cdots + X_{200}$ er tilnærmet normalfordelt med forventning 14 og standardavvik $\sqrt{21.02} = 4.58$, og vi kan bruke dette til å finne tilnærmingsverdier for sannsynlighetene.

Vi får (med kontinuitetskorreksjon):
$$P(Y \leq 9) = P\left(\frac{Y-14}{4.58} \leq \frac{9-14}{4.58}\right) \approx P\Big(Z \leq \underbrace{\frac{9-14+0.5}{4.58}}_{-0.98}\Big) = P(Z \leq -0.98) = 0.1635$$

P(Mer enn 20 feil)
$$= P(Y > 20) = 1 - P(Y \leq 20) = 1 - P\Big(\frac{Y-14}{4.58} \leq \underbrace{\frac{20-14+0.5}{4.58}}_{1.42}\Big) \approx 1 - P(Z \leq 1.42)$$
$$= 1 - 0.9222 = 0.0778$$

Vi får (uten kontinuitetskorreksjon):
$$P(Y \leq 9) = P\left(\frac{Y-14}{4.58} \leq \frac{9-14}{4.58}\right) \approx P\Big(Z \leq \underbrace{\frac{9-14}{4.58}}_{-1.09}\Big) = P(Z \leq -1.09) = 0.1379$$

P(Mer enn 20 feil)
$$= P(Y > 20) = 1 - P(Y \leq 20) = 1 - P\Big(\frac{Y-14}{4.58} \leq \underbrace{\frac{20-14}{4.58}}_{1.31}\Big) \approx 1 - P(Z \leq 1.31)$$

$= 1 - 0.9049 = 0.0951$

Oppgave 3

a) Et $(1-\alpha)100\%$ konfidensintervall for $\mu_X = \mathrm{E}(X_i)$, forventet motoreffekt med tilsetningsstoff, er gitt ved: $\left(\overline{X} - t_{\alpha/2,n-1}\sqrt{\dfrac{S_X^2}{n}},\ \ \overline{X} + t_{\alpha/2,n-1}\sqrt{\dfrac{S_X^2}{n}}\right)$.

Innsatt verdier: $\left(109.4 - 1.833\sqrt{\dfrac{15.4^2}{10}},\ \ 109.4 - 1.833\sqrt{\dfrac{15.4^2}{10}}\right) = (100.5, \quad 118.3)$

Tilsvarende for $\mu_Y = \mathrm{E}(Y_i)$, forventet motoreffekt uten tilsetningsstoff, er gitt ved:

$$\left(\overline{Y} - t_{\alpha/2,n-1}\sqrt{\frac{S_Y^2}{n}},\ \ \overline{Y} + t_{\alpha/2,n-1}\sqrt{\frac{S_Y^2}{n}}\right).$$

Innsatt verdier: $\left(\ 107.8 - 1.833\sqrt{\dfrac{14^2}{10}},\ \ 107.8 - 1.833\sqrt{\dfrac{14^2}{10}}\right) = (99.7, \quad 115.9)$

b) En test etter parplanen er en test for å sammenligne to utvalg der to og to målinger er tatt på samme enhet (på et vis hører sammen). For eksempel som i denne oppgaven, der to målinger gjøres på samme bil. Dersom vi lar X_i være første måling og Y_i andre på bil nr. i, $i = 1, 2, \ldots, n$, vil vi med paret t-test se på testst ørrelsen

$$\frac{\overline{D}}{\sqrt{\frac{S_D^2}{n}}}$$

Her er $D_i = X_i - Y_i$, $\overline{D} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} D_i$ og $S_D^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(D_i - \overline{D})^2$. (Merk at S_D IKKE er lik S_X-S_Y!) Vi bruker denne teststørrelsen til å teste $H_0 : \mu_D = 0$ mot passende alternativ, f.eks. $H_1 : \mu_D \neq 0$. Vi har at $\mu_D = \mathrm{E}(D_i) = \mathrm{E}(X_i - Y_i) = \mu_x - \mu_Y$, slik at vi tester de samme hypotesene som i en toutvalgstest. Men med den parvise testen fanger vi opp sammenheng mellom de parvise målingene som kan være forårsaket av at X_i og Y_i er målt på samme enhet.

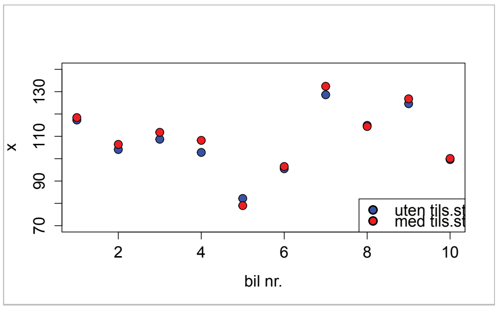
Ved en vanlig toutvalgs t-test i en situasjon der vi har n målinger i begge utvalgene, er testørrelsen

$$\frac{\overline{X} - \overline{Y}}{\sqrt{\frac{S^2_{\text{pooled}} \cdot 2}{n}}}$$

Telleren er lik: $\overline{D} = \overline{X} - \overline{Y}$, men nevnerene er ulike. Nullfordelingen i denne situasjonen er $t(2n-2)$ mens for paret t-test er nullfordelingen $t(n-1)$. Paret t-test vil være bedre dersom det er positiv korrelasjon mellom X_i og Y_i.

c)

Her er det gjort to målinger på samme bil; måling med og uten tilsetningsstoff. Siden mototeffekt til ulike biler kan variere, vil vi i denne situasjonen få tydeligste resultater om vi ser på forskjellene i bil for bil; dvs. vi benytter parplanen, se figur til høyre: variasjonen mellom to målinger på samme bil (som kan skyldes virkelig effekt av tilsetningsstoffet) er betydelig mindre enn variasjonen (ulikhetene) mellom ulike biler.



Ved parvise sammenligninger analyseres differansene $d_1, \ldots, d_n$ mellom motorkraft med (y_i) og uten tilsetningsstoffet (x_i); $d_i = y_i - x_i$. Disse $n = 10$ differansemålingene betraktes som utfall av n u.i.f. tilfeldige variable: $D_1, \ldots, D_n$. En antar at D_i er normalfordelt med forventning $\mathrm{E}(D_i) = \mu_D$ og varians $\mathrm{Var}(D_i) = \sigma_D^2$, for alle $i = 1, \ldots, n$. Variansen σ_D^2 er ukjent og må estimeres fra dataene: $S_D^2 = \dfrac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(D_i - \overline{D})^2$; utregnet: 2.4^2.

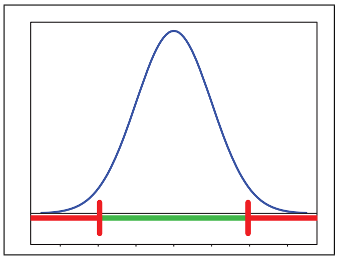
Vi har: $\mu_D = \mathrm{E}(Y_i) - \mathrm{E}(X_i)$ som er i forskjell i forventet motoreffekt med og uten tilsetningsstoffet.

Vil teste: $H_0 : \mu_D = 0$ mot $H_0 : \mu_D \neq 0$

Teststørrelse: $T = \dfrac{\overline{D}}{\sqrt{\frac{S_D^2}{n}}}$; nullfordeling: $t(n-1)$.

Forkastningsområde (ved 5% signifikansnivå):

$(-\infty, -t_{0.025,9}] \cup [t_{0.025,9}, \infty)$, $t_{0.025,9} = 2.262$.



Utfall av teststørrelsen: $\dfrac{1.6}{\sqrt{\frac{2.4^2}{10}}} = 2.108$. Siden utfallet av testørrelsen ikke faller i forkastningsområdet, kan vi ikke forkaste H_0; det er ikke grunnlag for å hevde at det er forskjell i forventet motoreffekt med og uten tilsetningsstoffet.

d) Vi skal utlede et 95% konfidensintervall for endringen i forventet motoreffekt med og uten tilsetnings-stoffet. Siden motoreffekten er målt på samme bil med og uten et tilsetningsstoff, vil det være mest effektivt å gjøre analysene etter parplanen.

Vi har at $T = \dfrac{\overline{D} - \mu_D}{\sqrt{\frac{S_D^2}{n}}} \sim t(n-1)$. Derfor kan vi sette opp:

$$P\Big(-t_{\alpha/2,n-1} \leq \frac{\overline{D} - \mu_D}{\sqrt{\frac{S_D^2}{n}}} \leq t_{\alpha/2,n-1}\Big) = 1 - \alpha$$

Vi har videre:

$$\begin{array}{rcl}
-t_{\alpha/2,n-1} \leq & \frac{\overline{D}-\mu_D}{\sqrt{\frac{S_D^2}{n}}} & \leq t_{\alpha/2,n-1} \\
& \Updownarrow & \\
-t_{\alpha/2,n-1}\sqrt{\frac{S_D^2}{n}} \leq & \overline{D}-\mu_D & \leq t_{\alpha/2,n-1}\sqrt{\frac{S_D^2}{n}} \\
& \Updownarrow & \\
-\overline{D}-t_{\alpha/2,n-1}\sqrt{\frac{S_D^2}{n}} \leq & -\mu_D & \leq -\overline{D}+t_{\alpha/2,n-1}\sqrt{\frac{S_D^2}{n}} \\
& \Updownarrow & \\
\overline{D}+t_{\alpha/2,n-1}\sqrt{\frac{S_D^2}{n}} \geq & \mu_D & \geq \overline{D}-t_{\alpha/2,n-1}\sqrt{\frac{S_D^2}{n}},
\end{array}$$

og derfor kan vi sette opp:

$$P\Big(\overline{D}-t_{\alpha/2,n-1}\sqrt{\frac{S_D^2}{n}} \leq \mu_D \leq \overline{D}+t_{\alpha/2,n-1}\sqrt{\frac{S_D^2}{n}}t_{\alpha/2,n-1}\Big) = 1-\alpha.$$

Derfor er et $(1-\alpha)100\%$ konfidensintervall for μ_D: $\Big(\overline{D}-t_{\alpha/2,n-1}\sqrt{\frac{S_D^2}{n}},\ \ \overline{D}+t_{\alpha/2,n-1}\sqrt{\frac{S_D^2}{n}}\Big)$.

Utregnet 95%-intervall: $t_{0.025,9} = 2.262$, $\Big(1.6 - 2.262 \cdot \sqrt{\frac{2.4^2}{10}},\quad 1.6 + 2.262 \cdot \sqrt{\frac{2.4^2}{10}}\Big) = (-0.12,\ \ 3.32)$.

Merk: dersom man i denne situasjonen ikke bruker parplanen, men istedet et vanlig tout-valgs t-intervall, $(\overline{y}-\overline{x}-t_{\alpha/2,n_1+n_2-2}\sqrt{S_p^2(1/n_1+1/n_2)},\ \ \overline{y}-\overline{x}+t_{\alpha/2,n_1+n_2-2}\sqrt{S_p^2(1/n_1+1/n_2)})$, blir resultatene betydelig mindre nøyaktige. Utregnet 95% intervall for forskjell blir da $(-12.2, 15.4)$, som er mye breiere enn det vi får med parplanen.

Oppgave 4

a) Dersom vi lar $\overline{y}_{i\cdot}$ være gjennomsnittet i gruppe i ($= 1$ (A), 2 (B), 3 (C) og 4 (D)), og $\overline{y}_{\cdot\cdot} = 5.75$ totalgjennomsnittet $(5.75 = (5.475+5.4+6.225+5.9)/4)$, så er SSA$= \sum_{i=1}^{4} n_i(\overline{y}_{i\cdot} - \overline{y}_{\cdot\cdot})^2$ $= 4(5.475-5.75)^2 + 4(5.4-5.75)^2 + 4(6.225-5.75)^2 + 4(5.9-5.75)^2 = 1.785$ ($n_i = 4 =$ antall målinger i gruppe nr. i).

"F value" er utfall av teststørrelse for å teste $H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4$ versus H_1 : minst en forskjellig:

$$F = \frac{\frac{SSA}{4-1}}{\frac{SSE}{15-3}} = \frac{MSA}{MSE} = 2.14$$

Under H_0 er F fisherfordelt med 3 og 12 frihetsgrader.

b) ANOVA-modell for dette tilfellet vil være at vektene er normalfordelte med samme varians σ^2, men mulig ulik forventningsverdi for de fire fortypene.

$$Y_{ij} = \mu_i + E_{ij},$$

der $E_{ij} \sim \mathcal{N}(0, \sigma)$ for alle fortyper $i = 1, 2, 3, 4$ og fisk $j = 1, 2, 3, 4$.
Her er $\mu_i = \mathrm{E}(Y_{ij})$ = forventet vekt med fortype i. (Vi kan også skrive dette som: $Y_{ij} = \mu + \alpha_i + E_{ij}$, der μ er et felles nivå for forventet vekt og α_i er gruppe nr. i sitt avvik fra dette nivået. (Vi må da sette $\sum_i \alpha_{i=1}^4 = 0$.)

c) Vi vil teste: $H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4$ versus H_1 : minst en forskjellig fra de andre.

Teststørrelse:

$$F = \frac{\frac{SSA}{4-1}}{\frac{SSE}{15-3}} = \frac{MSA}{MSE}$$

(Fra tabell: SSE=3.355.)

Test: Forkaster H_0 dersom observert F er større en kritisk verdi $F_{3,12} = 3.49$ på 5% signifikansnivå.

Utfall av teststørrelsen: $2.13 < 3.49$. Dette gir ikke forkastning av nullhypotesen. Vi ikke konkludere med at fortypene gir ulik forventet vekt.

Residualer:
I grgruppe nr. i beregnes residualene ved: $\widehat{e}_{ij} = y_{ij} - \overline{y}_{i\cdot}$, og vi får for gruppe 4:

j	y_{4j}	$\overline{y}_{4\cdot}$	$\widehat{e}_{4j}$
1	5.5	5.9	-0.4
2	5.4	5.9	-0.5
3	6.2	5.9	0.3
4	6.5	5.9	0.6