DET TEKNISK-NATURVITENSKAPELIGE FAKULTET

EKSAMEN I: ÅMA290 Matematikk 3 - vektoranalyse

DATO: 12. mai 2009 kl. 0900 - 1300

TILLATTE HJELPEMIDLER:
Rottmann: Matematisk formelsamling
Kalkulatorer: HP 30S, Casio FX82, TI-30.

Universitetet i Stavanger

OPPGAVESETTET BESTÅR AV 3 OPPGAVER PÅ 2 SIDER + 1 SIDE MED FORMLER

OPPGAVE 1

Gitt kurven C: $\mathbf{r}(t) = (t-2)\,\mathbf{i} + (2t+2)\,\mathbf{j} \ + 2t\,\mathbf{k}; \quad 0 \le t \le 1.$

a) Beregn kurveintegralet

$$\int_C (xy + z)\, ds.$$

b) Vis at vektorfeltet $\mathbf{F}(x,y,z) = (z^2 - yz)\mathbf{i} - xz\,\mathbf{j} + (2xz - xy)\,\mathbf{k}$ er konservativt.

c) Finn en potensialfunksjon (skalarfelt) til vektorfeltet $\mathbf{F}$.

d) Beregn kurveintegralet

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}.$$

OPPGAVE 2

La S være den delen av paraboloiden $z = x^2 + y^2$ som ligger under planet $z = 1$, og la D være legemet avgrenset av flaten S og planet $z = 1$.

a) Beregn integralet

$$\iiint_D \sqrt{x^2+y^2}\, dV. \qquad \text{(Hint: bruk sylinderkoordinater).}$$

b) Beregn flateintegralet

$$\iint_S \frac{1}{4z+1}\, dS.$$

OPPGAVE 3

Gitt vektorfeltet $\mathbf{F}(x, y, z) = -6x\mathbf{i} + yz\,\mathbf{j} + x\,\mathbf{k}$.
La D være kula $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$.

a) Finn $div\,\mathbf{F}$ og $curl\,\mathbf{F}$.

b) Bruk divergensteoremet til å beregne flateintegralet

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}}\,dS,$$

der S er randen (overflaten) til kula D, og $\hat{\mathbf{N}}$ er enhetsnormalvektor til S. $\hat{\mathbf{N}}$ peker utover (fra D).

c) La C være skjæringskurven mellom kuleflata S og $xy-$ planet. Omløpsretning langs C (orientering) er mot urviser, sett ovenfra.
Beregn kurveintegralet

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}.$$

Lykke til!

Formler:

Kurveintegral av en funksjon f langs en kurve C: $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$, $\quad a \le t \le b$:

$$\int\limits_C f\, ds = \int_a^b f(\mathbf{r}(t))|\frac{d\mathbf{r}}{dt}|\, dt.$$

Kurveintegral av et vektorfelt $\mathbf{F} = F_1\mathbf{i} + F_2\mathbf{j} + F_3\mathbf{k}$, langs en kurve C: $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$, $a \le t \le b$:

$$\int\limits_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int\limits_C F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz = \int_a^b (F_1 \frac{dx}{dt} + F_2 \frac{dy}{dt} + F_3 \frac{dz}{dt})\, dt.$$

Flateintegral av en funksjon f over en flate $S : g(x, y, z) = K$ (K er en konstant):

$$\iint\limits_S f\, dS = \iint\limits_R f \frac{|\nabla g|}{|\nabla g \cdot \mathbf{P}|}\, dA.$$

Stokes' teorem:

$$\oint\limits_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint\limits_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \hat{\mathbf{N}}\, dS = \iint\limits_R (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \frac{\pm \nabla g}{|\nabla g \cdot \mathbf{P}|}\, dA.$$

Divergensteoremet:

$$\iiint\limits_D \nabla \cdot \mathbf{F}\, dV = \iint\limits_S \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}}\, dS.$$

$$div\, \mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{F}, \quad curl\, \mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F}, \quad \nabla = \frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}$$

Sylinderkoordinater: $(r\cos\theta, r\sin\theta, z)$.
Kulekoordinater: $(\rho\sin\phi\cos\theta, \rho\sin\phi\sin\theta, \rho\cos\phi)$.

ÅMA 290 Matematikk 3 - vektoranalyse

Eksamen 12. mai 2009.

Løsning

Oppgave 1.

C: $\vec{r}(t) = (t-2)\vec{i} + (2t+2)\vec{j} + 2t\vec{k}$

$0 \le t \le 1$

a) $x = t-2, \quad y = 2t+2, \quad z = 2t.$

$\frac{dx}{dt} = 1, \quad \frac{dy}{dt} = 2, \quad \frac{dz}{dt} = 2.$

$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k}.$

$\left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right| = \sqrt{1+2^2+2^2} = \sqrt{9} = 3.$

Beregn $\int_C (xy+z)\,ds.$

$ds = \left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right| dt = 3\,dt.$

$\int (xy+z)\,ds = \int_0^1 [(t-2)(2t+2)+2t]\cdot 3\,dt =$

$\int [2t^2-4t+2t-4+2t]\cdot 3\,dt =$

$$= 3\int_0^1 (2t^2-4)\,dt = 3\cdot\left[\tfrac{2}{3}t^3 - 4t\right]_0^1$$

$$= 3\cdot\left[\tfrac{2}{3} - 4\right] = 3\cdot\frac{2-12}{3} = \underline{\underline{-10}}$$

b) $\vec{F}(x,y,z) = (z^2 - yz)\vec{i} - xz\vec{j} + (2xz - xy)\vec{k}$

Vis at $\vec{F}$ er konservativt:

$$\nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ z^2 - yz & -xz & 2xz - xy \end{vmatrix}$$

$$= \vec{i}\left[\tfrac{\partial}{\partial y}(2xz - xy) - \tfrac{\partial}{\partial z}(-xz)\right]$$
$$- \vec{j}\left[\tfrac{\partial}{\partial x}(2xz - xy) - \tfrac{\partial}{\partial z}(z^2 - yz)\right]$$
$$+ \vec{k}\left[\tfrac{\partial}{\partial x}(-xz) - \tfrac{\partial}{\partial y}(z^2 - yz)\right]$$

$$= \vec{i}\,[-x+x] - \vec{j}\,[2z - y - 2z + y] + \vec{k}\,[-z+z] = \vec{0}.$$

Siden $\nabla \times \vec{F} = 0$ i et enkelt sammenhengende område, er feltet konservativt.

c) Finn potensialfeltet φ $(\vec{F} = \nabla\varphi)$.

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = z^2 - yz \qquad \mathrm{I}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = -xz \qquad \mathrm{II}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = 2xz - xy \qquad \mathrm{III}$$

$$\mathrm{I}: \frac{\partial \varphi}{\partial x} = z^2 - yz \Rightarrow \varphi = \int (z^2 - yz)\, dx$$

$$= xz^2 - xyz + C_1(y, z).$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = -xz + \frac{\partial}{\partial y} C_1 \underset{\uparrow \atop \mathrm{II}}{=} -xz \Rightarrow \frac{\partial C_1}{\partial y} = 0$$

$$\Rightarrow C_1 = C_2(z) \Rightarrow \varphi = xz^2 - xyz + C_2(z).$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = 2xz - xy + C_2' \underset{\uparrow \atop \mathrm{III}}{=} 2xz - xy \Rightarrow C_2' = 0$$

$$\Rightarrow C_2 = \text{konstant}.$$

Sett $C_2 = 0 \Rightarrow \underline{\underline{\varphi = xz^2 - xyz}}$

d) Beregn $\int_C \vec{F} \circ d\vec{F}$

C: $x = t-2$, $y = 2t+2$, $z = 2t$.

$\vec{F}$ konservativ $\Rightarrow \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_A^B d\varphi = \varphi \Big|_A^B$

der A og B er start og sluttpkt. på C.

A: $t = 0$: $x = -2$, $y = 2$, $z = 0$

B: $t = 1$: $x = -1$, $y = 4$, $z = 2$.

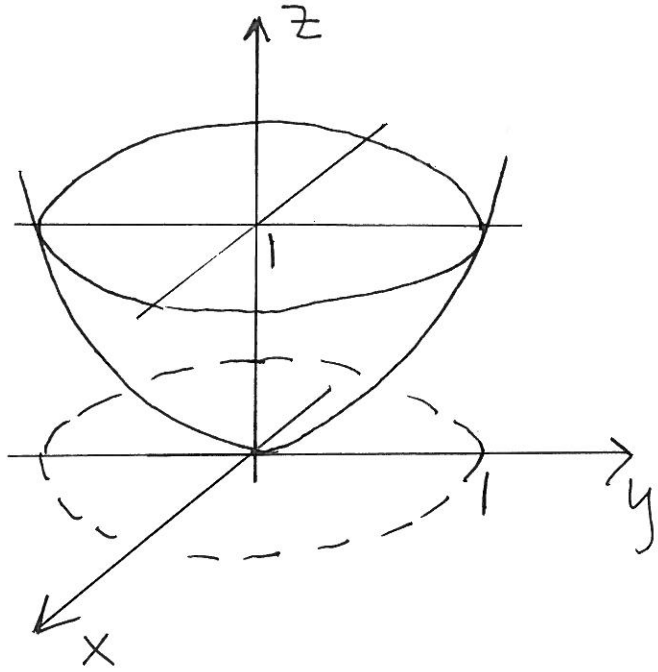
$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \varphi \Big|_A^B = xz^2 - xyz \Big|_{(-2,2,0)}^{(-1,4,2)}$$

$$= -1 \cdot 2^2 - (-1) \cdot 4 \cdot 2 - [-2 \cdot 0 - (-1) \cdot 2 \cdot 0]$$

$$= -4 + 8 - 0 = \underline{\underline{4}}$$

Oppgave 2

$S: z = x^2 + y^2.$



a) Beregn $\iiint_D \sqrt{x^2+y^2}\, dV$

Skjæring mellom paraboloide og $z=1$:

$x^2+y^2=1.$

Sylinderkoordinater: $\sqrt{x^2+y^2} = r$

Paraboloide: $z = x^2+y^2 = r^2.$

$dV = r\,dz\,dr\,d\theta.$

$$\iiint_D \sqrt{x^2+y^2}\, dV = \iiint_D r\, dV =$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^1\int_{r^2}^1 r\cdot r\,dz\,dr\,d\theta = \iint r^2 z\Big|_{r^2}^{1} dr\,d\theta =$$

$$= \iint r^2(1-r^2)\,dr\,d\theta = \iint (r^2 - r^4)\,dr\,d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{1}{3}r^3 - \frac{1}{5}r^5 \Big|_0^1 d\theta = \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) d\theta$$

$$= \frac{5-3}{15} \cdot 2\pi = \frac{2}{15} \cdot 2\pi = \underline{\underline{\frac{4\pi}{15}}}$$

b) Beregn $\iint_S \frac{1}{4z+1}\,dS$

dS: flateelement på paraboloiden.

Definer $g(x,y,z) = x^2 + y^2 - z$

S er da nivåflaten $g = 0$.

$\nabla g = 2x\vec{i} + 2y\vec{j} - \vec{k}$

$$|\nabla g| = \sqrt{(2x)^2 + (2y)^2 + 1} = \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1} = \sqrt{4z+1}$$

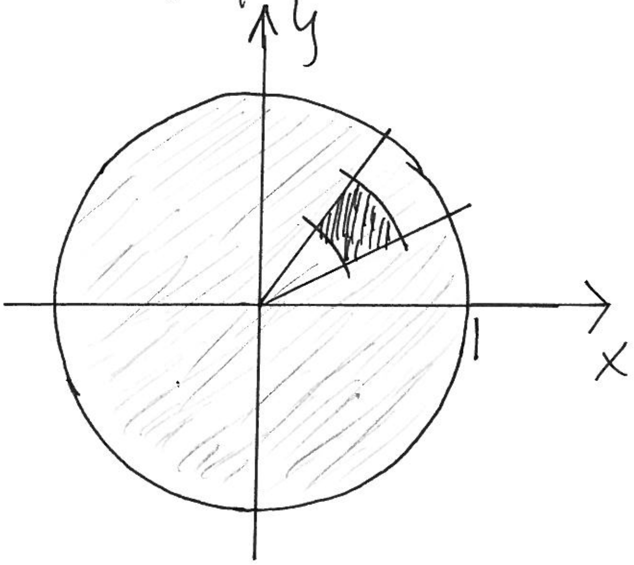
$z = x^2 + y^2$ på S.

$$dS = \frac{|\nabla g|}{|\nabla g \cdot \vec{p}|}\,dA$$

der $\vec{p}$ er enhetsnormalvektor til projeksjonsplan. dA er flateelement i projeksjonen.

Projeksjon av S i xy-planet:

$x^2+y^2 \leq 1$.



$\vec{p} = \vec{k}$

$$dS = \frac{|\nabla g|}{|\nabla g \cdot \vec{k}|} dA$$

$$= \frac{\sqrt{4z+1}}{1} \cdot r\,dr\,d\theta$$

$$\iint_S \frac{1}{4z+1} dS = \int_0^{2\pi}\int_0^1 \frac{1}{4z+1} \cdot \sqrt{4z+1}\, r\,dr\,d\theta$$

$$= \iint \frac{1}{\sqrt{4z+1}} r\,dr\,d\theta \underset{\text{på } S}{=} \iint \frac{1}{\sqrt{4(x^2+y^2)+1}} r\,dr\,d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^1 \frac{r}{\sqrt{4r^2+1}} dr\,d\theta.$$

Subst.: $u = 4r^2+1$

$\frac{du}{dr} = 8r$

$dr = \frac{du}{8r}$.

$$= \frac{1}{8}\iint \frac{r}{\sqrt{u}} \cdot \frac{du}{r} d\theta = \frac{1}{8}\iint u^{-\frac{1}{2}} du\,d\theta$$

$$= \frac{1}{8} \cdot 2 \int u^{\frac{1}{2}} d\theta = \frac{1}{4}\int \sqrt{4r^2+1}\Big|_0^1 d\theta = \frac{1}{4}\int(\sqrt{5}-1)\,d\theta$$

$$= \frac{1}{4}(\sqrt{5}-1)\cdot 2\pi = \underline{\underline{\frac{\pi}{2}[\sqrt{5}-1]}}$$

Oppgave 3.

$$\vec{F}(x,y,z) = -6x\vec{i} + yz\vec{j} + x\vec{k}$$

a) $\nabla \cdot \vec{F} = \frac{\partial}{\partial x}(-6x) + \frac{\partial}{\partial y}(yz) + \frac{\partial}{\partial z}x$

$$= -6 + z + 0 = \underline{\underline{z-6.}}$$

$$\nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -6x & yz & x \end{vmatrix}$$

$$= \vec{i}\left[\frac{\partial}{\partial y}x - \frac{\partial}{\partial z}(yz)\right] - \vec{j}\left[\frac{\partial}{\partial x}x - \frac{\partial}{\partial z}(-6x)\right]$$

$$+\vec{k}\left[\frac{\partial}{\partial x}(yz) - \frac{\partial}{\partial y}(-6x)\right] = -y\vec{i} - \vec{j} + 0$$

$$= \underline{\underline{-y\vec{i} - \vec{j}}}$$

b) Beregn $\iint\limits_S \vec{F} \cdot \hat{N}\, dS.$

$$\iint\limits_S \vec{F} \cdot \hat{N}\, dS = \iiint\limits_D \nabla \cdot \vec{F}\, dV$$

div. teoremet

$$= \iiint_D (z-6)\,dV = \iiint_D z\,dV - 6\iiint_D dV.$$

$$-6\iiint_D dV = -6\cdot V = -6\cdot \tfrac{4}{3}\pi r^3 \underset{r=1}{=} -6\cdot\tfrac{4}{3}\pi$$

$$\underline{= -8\pi}.$$

Alternativt: Regn ut trippelintegralet.

$$\iiint_D z\,dV = \int_0^{2\pi}\int_0^1 \int_{-\sqrt{1-r^2}}^{\sqrt{1-r^2}} z\, r\,dz\,dr\,d\theta$$

(sylinderkoord)

Kula:
$x^2+y^2+z^2=1$
$\Rightarrow z = \pm\sqrt{1-r^2}$

$$= \iint \tfrac{1}{2}z^2\Big|_{-\sqrt{1-r^2}}^{\sqrt{1-r^2}} r\,dr\,d\theta$$

$$= \tfrac{1}{2}\iint \left[(1-r^2)-(1-r^2)\right] r\,dr\,d\theta = 0.$$

Alternativt: Siden kula D er symmetrisk mhp z, og z er en oddefunksjon, er $\iiint_D z\,dV = 0$. $\Rightarrow$

$$\iint \vec{F} \cdot \hat{N} \, dS = 0 - 8\pi = \underline{\underline{-8\pi}}$$

c) Beregn $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$.

Bruk Stokes' teorem: $\oint_C \vec{F} \cdot dr = \iint_S \nabla \times \vec{F} \cdot \hat{N} \, dS$

La S være sirkelskiva $x^2 + y^2 \leq 1$.

$\hat{N} = \vec{k}$. $dS = dA$ = flateelementet i xy-planet.

$\nabla \times \vec{F} \cdot \hat{N} = (-y\vec{i} - \vec{j}) \cdot \vec{k} = 0 \implies$

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \underline{\underline{0.}}$$

Alternativt: Parametrisering av C:

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int \vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} \, dt,$$

der $\vec{r}(t) = \cos t \, \vec{i} + \sin t \, \vec{j}$, $z = 0$, $0 \leq t \leq 2\pi$.