DET TEKNISK-NATURVITENSKAPELIGE FAKULTET

EKSAMEN I: ÅMA290 Matematikk 3 - vektoranalyse

DATO: 18. februar 2010 kl. 0900 - 1300

TILLATTE HJELPEMIDLER:
Rottmann: Matematisk formelsamling
Kalkulatorer: HP 30S, Casio FX82, TI-30.

Universitetet i Stavanger

OPPGAVESETTET BESTÅR AV 3 OPPGAVER PÅ 2 SIDER + 1 SIDE MED FORMLER

OPPGAVE 1

Gitt kurven C: $\mathbf{r}(t) = \sin t\,\mathbf{i} + \cos t\,\mathbf{j} + t\,\mathbf{k}$; $\quad 0 \le t \le \pi$.

a) Finn enhetstangentvektor til C i punktet $t = \pi/4$.

b) Beregn kurveintegralet

$$\int_C (x + 3z^2)\,ds.$$

Gitt vektorfeltet $\mathbf{F}(x, y, z) = y\,\mathbf{i} - x\,\mathbf{j} + xz\,\mathbf{k}$

c) Beregn kurveintegralet

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}.$$

OPPGAVE 2

La S være den delen av den øvre halvkuleflaten $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ $(z \ge 0)$ som ligger utenfor sylinderen $x^2 + y^2 = 1$, og la T være legemet avgrenset av flaten S, sylinderen $x^2 + y^2 = 1$ og xy -planet.

a) Finn enhetsnormalvektor til S i et vilkårlig punkt på S. Enhetsnormalvektoren skal peke i retning ut fra T.

b) Beregn flateintegralet

$$\iint_S z\,dS.$$

c) Beregn integralet

$$\iiint_T z^3\,dV. \qquad \text{(Hint: bruk sylinderkoordinater).}$$

OPPGAVE 3

Gitt vektorfeltet $\mathbf{F}(x, y, z) = 2z\mathbf{i} + (7x - 3y^2)\,\mathbf{j} + (3x + y)\,\mathbf{k}$.
La T være den delen av 1. oktant som ligger under planet $2x + y + 2z = 2$.

a) Finn $div\,\mathbf{F}$ og $curl\,\mathbf{F}$.

b) La C være trekanten med hjørner i $(1, 0, 0)$, $(0, 2, 0)$ og $(0, 0, 1)$. Omløpsretning langs C (orientering) er mot urviser, sett ovenfra.
Beregn kurveintegralet

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}.$$

c) Bruk divergensteoremet til å beregne flateintegralet

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS,$$

der S er randen (overflaten) til legemet T, og $\mathbf{n}$ er enhetsnormalvektor til S.
$\mathbf{n}$ peker utover (fra T).

Lykke til!

Formler:

Kurveintegral av en funksjon f langs en kurve C: $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$, $\quad a \leq t \leq b$:

$$\int_C f\,ds = \int_a^b f(\mathbf{r}(t))|\frac{d\mathbf{r}}{dt}|\,dt.$$

Kurveintegral av et vektorfelt $\mathbf{F} = F_1\mathbf{i} + F_2\mathbf{j} + F_3\mathbf{k}$, langs en kurve C: $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$, $a \leq t \leq b$:

$$\int_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{T}\,ds = \int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_C F_1dx + F_2dy + F_3dz = \int_a^b (F_1\frac{dx}{dt} + F_2\frac{dy}{dt} + F_3\frac{dz}{dt})\,dt.$$

Flateintegral av en funksjon f over en flate $S: g(x,y,z) = K$ (K er en konstant):

$$\iint_S f\,dS = \iint_R f\,\frac{|\nabla g|}{|\nabla g\cdot\mathbf{P}|}\,dA.$$

Stokes' teorem:

$$\oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \iint_S (\nabla\times\mathbf{F})\cdot\mathbf{n}\,dS = \iint_R (\nabla\times\mathbf{F})\cdot\frac{\pm\nabla g}{|\nabla g\cdot\mathbf{P}|}\,dA.$$

Divergensteoremet (Gauss' teorem):

$$\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS = \iiint_T \nabla\cdot\mathbf{F}\,dV.$$

$$div\,\mathbf{F} = \nabla\cdot\mathbf{F},\quad curl\,\mathbf{F} = \nabla\times\mathbf{F},\quad \nabla = \frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}$$

Sylinderkoordinater: $(r\cos\theta, r\sin\theta, z)$.
Kulekoordinater: $(\rho\sin\phi\cos\theta, \rho\sin\phi\sin\theta, \rho\cos\phi)$.

ÅMA 290 Matematikk 3 - vektoranalyse

Eksamen 18. februar 2010

Lösning

Oppgave 1

$C: \quad r(t) = \sin t\,\vec{i} + \cos t\,\vec{j} + t\vec{k}.$

$0 \le t \le \pi.$

Dvs.: $x = \sin t, \quad y = \cos t, \quad z = t.$

a) Enhetstangentvektor $\vec{T} = \dfrac{\frac{d\vec{r}}{dt}}{\left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right|}$

$$\frac{dx}{dt} = \cos t, \quad \frac{dy}{dt} = -\sin t, \quad \frac{dz}{dt} = 1.$$

$$\left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right| = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\cos^2 t + (-\sin t)^2 + 1} = \sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t + 1}$$

$$= \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

(konstant)

$$\frac{d\vec{r}}{dt}(t=\pi/4) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\vec{i} - \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\vec{j} + \vec{k}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{2}\,\vec{i} - \frac{1}{2}\sqrt{2}\,\vec{j} + \vec{k}.$$

$$\vec{T} = \frac{\frac{dr}{dt}(t=\frac{\pi}{4})}{\left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right|} = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{2}\,\vec{i} - \frac{1}{2}\sqrt{2}\,\vec{j} + \vec{k}}{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{1}{2}\vec{i} - \frac{1}{2}\vec{j} + \frac{1}{2}\sqrt{2}\,\vec{k} = \underline{\underline{\frac{1}{2}\left[\vec{i} - \vec{j} + \sqrt{2}\,\vec{k}\right]}}$$

b) $ds = \left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right| dt = \sqrt{2}\,dt.$

$$\int_C (x + 3z^2)\,ds = \int_C (x+3z^2)\sqrt{2}\,dt$$

$$= \sqrt{2}\int_0^{\pi} (\sin t + 3t^2)\,dt = \sqrt{2}\left[-\cos t + t^3\right]_0^{\pi}$$

$$= \sqrt{2}\left[-(\cos\pi - \cos 0) + \pi^3\right]$$

$$= \sqrt{2}\left[-(-1 - 1) + \pi^3\right] = \underline{\underline{\sqrt{2}\left[2 + \pi^3\right]}}$$

c) $\vec{F} = y\vec{i} - x\vec{j} + xz\vec{k}$.

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int \left(\vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} \right) dt$$

$$= \int_0^{\pi} \left(F_1 \frac{dx}{dt} + F_2 \frac{dy}{dt} + F_3 \frac{dz}{dt} \right) dt$$

$$= \int \left(y \frac{dx}{dt} - x \frac{dy}{dt} + xz \frac{dz}{dt} \right) dt$$

$$= \int \left(\cos t \cdot \cos t - \sin t(-\sin t) + \sin t \cdot t \right) dt$$

$$= \int_0^{\pi} \left(\cos^2 t + \sin^2 t + t \sin t \right) dt = \int_0^{\pi} (1 + t \sin t) dt$$

$$= t + t(-\cos t) + \int \cos t \, dt = t - t\cos t + \underset{\overset{\parallel}{0}}{\sin t} \Big|_0^{\pi}$$

↑ delvis int. (eller Rottmann)

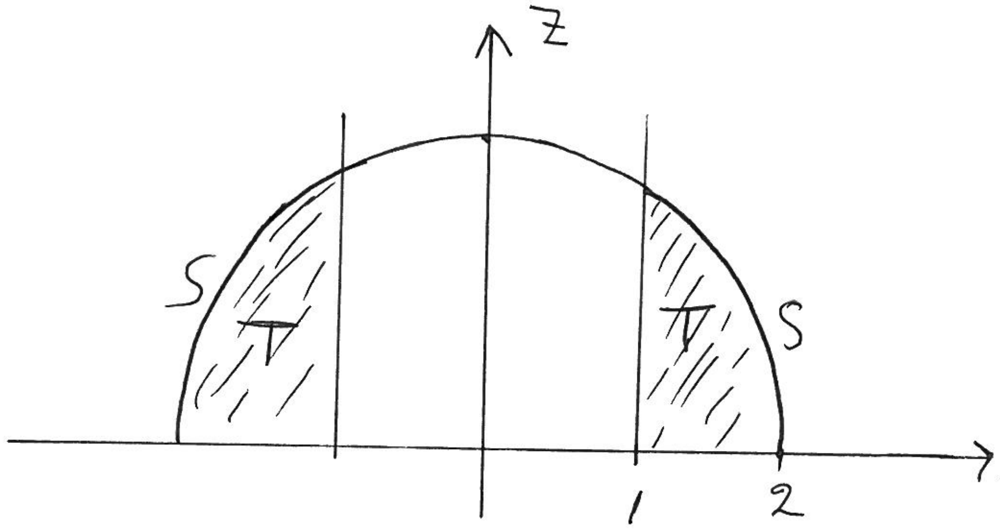
$$= \pi - [\pi \cos \pi - 0] + 0$$

$$= \pi - \pi \cdot (-1) = \pi + \pi = \underline{\underline{2\pi}}$$

Oppgave 2

Kuleflaten: $x^2+y^2+z^2=4$

Sylinderen: $x^2+y^2=1$



Vertikalsnitt

S: $x^2+y^2+z^2=4$.

a) Definer $g(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$.

Kuleflaten er da nivåflaten $g=4$.

$$\nabla g = \frac{\partial g}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial g}{\partial y}\bar{j} + \frac{\partial g}{\partial z}\bar{k}$$

$$= 2x\bar{i} + 2y\bar{j} + 2z\bar{k}$$

Peker oppover for $z>0$, og dermed i retning ut fra T.

$$|\nabla g| = \sqrt{(2x)^2+(2y)^2+(2z)^2}$$

$$= 2\sqrt{x^2+y^2+z^2} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{på } S}}{=} 2\sqrt{4} = 4$$

Enhetsnormalvektor: $\vec{n} = \dfrac{\nabla g}{|\nabla g|}$

$$= \frac{2x\vec{i}+2y\vec{j}+2z\vec{k}}{4} = \underline{\underline{\frac{x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}}{2}}}$$

b) Beregn $\iint_S z\,dS$.

$$dS = \frac{|\nabla g|}{|\nabla g \cdot \vec{p}|}\,dA = \frac{4}{|\nabla g \cdot \vec{k}|}\,dA$$

$$= \frac{4}{|2z|}\,dA = \frac{2}{z}\,dA, \quad (z>0)$$

der dA er flateelementet i xy-planet.

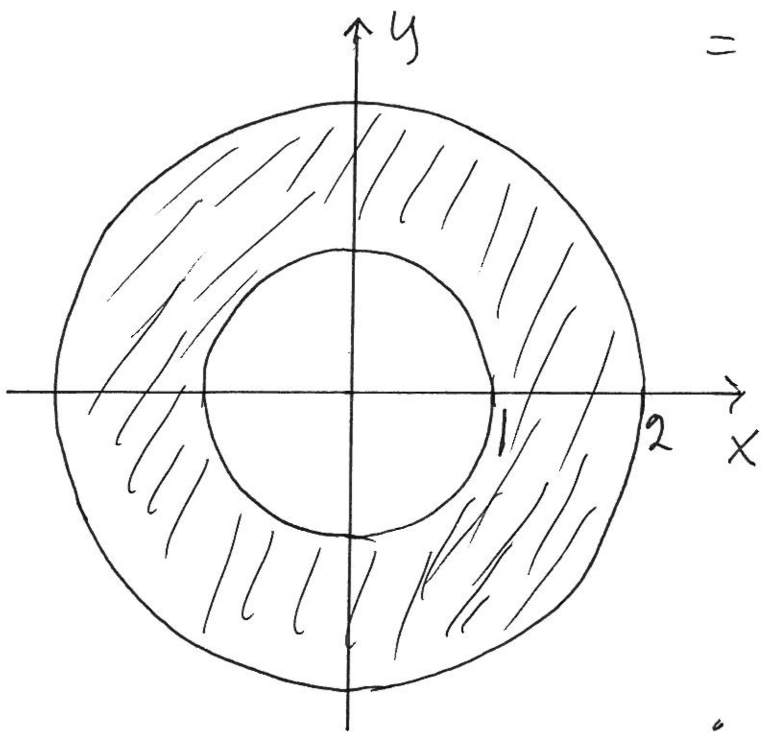
$$\iint_S z\,dS = \iint z \cdot \frac{2}{z}\,dA = 2\iint dA =$$

$$= 2\int_0^{2\pi}\int_1^2 r\,dr\,d\theta = 2\int \tfrac{1}{2}r^2\Big|_1^2 d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}(2^2-1)\,d\theta$$

$$3\int_0^{2\pi} d\theta = 3\cdot 2\pi$$

$$\underline{\underline{= 6\pi}}$$



Alternativ:

$\int dA$ = areal om

område mellom

sirklene $r=1$ og $r=2$:

$$\pi\cdot 2^2 - \pi\cdot 1 = 3\pi \implies$$

$$\iint z\,dS = 2\cdot 3\pi = \underline{\underline{6\pi}}$$

c) Beregn $\iiint_T z^3\,dV$.

Kuleflaten: $z^2 = 4 - x^2 - y^2 = 4 - r^2 \implies$

$$z = \sqrt{4-r^2} \qquad (z \geq 0)$$

Bruk sylinderkoord.

$1 \le r \le 2, \quad 0 \le \theta \le 2\pi$

$0 \le z \le \sqrt{4-r^2}$

$$\iiint_T z^3 \, dV = \int_0^{2\pi} \int_1^2 \int_0^{\sqrt{4-r^2}} z^3 \, dz\, r\, dr\, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_1^2 \frac{1}{4} z^4 \Big|_0^{\sqrt{4-r^2}} r\, dr\, d\theta$$

$$= \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} \int_1^2 \left(\sqrt{4-r^2}\right)^4 r\, dr\, d\theta = \frac{1}{4} \iint (4-r^2)^2 \, r\, dr\, d\theta$$

$$= \frac{1}{4} \iint u^2 \, r \left(-\frac{du}{2r}\right) d\theta$$

Subst.:

$u = 4 - r^2$

$\frac{du}{dr} = -2r$

$dr = -\frac{du}{2r}$

$$= -\frac{1}{8} \iint u^2 \, du\, d\theta$$

$$= -\frac{1}{8} \cdot \frac{1}{3} \int u^3 \, d\theta =$$

$$= -\frac{1}{24} \int (4-r^2)^3 \Big|_1^2 d\theta$$

$$= -\frac{1}{24} \int_0^{2\pi} \left[0 - (4-1)^3\right] d\theta = \frac{1}{24} \cdot 3^3 \int d\theta$$

$$= \frac{27}{24} \cdot 2\pi = \underline{\underline{\frac{27\pi}{12}}}$$

Oppgave 3

$$\vec{F}(x,y,z) = 2z\,\vec{i} + (7x-3y^2)\,\vec{j} + (3x+y)\,\vec{k}$$

a) $$\nabla\cdot\vec{F} = \frac{\partial}{\partial x}(2z) + \frac{\partial}{\partial y}(7x-3y^2) + \frac{\partial}{\partial z}(3x+y)$$

$$= 0 - 6y + 0 = \underline{\underline{-6y}}$$

$$\nabla\times\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2z & 7x-3y^2 & 3x+y \end{vmatrix}$$

$$= \vec{i}\left[\frac{\partial}{\partial y}(3x+y) - \frac{\partial}{\partial z}(7x-3y^2)\right]$$

$$- \vec{j}\left[\frac{\partial}{\partial x}(3x+y) - \frac{\partial}{\partial z}(2z)\right]$$

$$+ \vec{k}\left[\frac{\partial}{\partial x}(7x-3y^2) - \frac{\partial}{\partial y}(2z)\right]$$

$$= \vec{i}\cdot 1 - \vec{j}\,[3-2] + \vec{k}\cdot 7 = \underline{\underline{\vec{i} - \vec{j} + 7\vec{k}}}$$

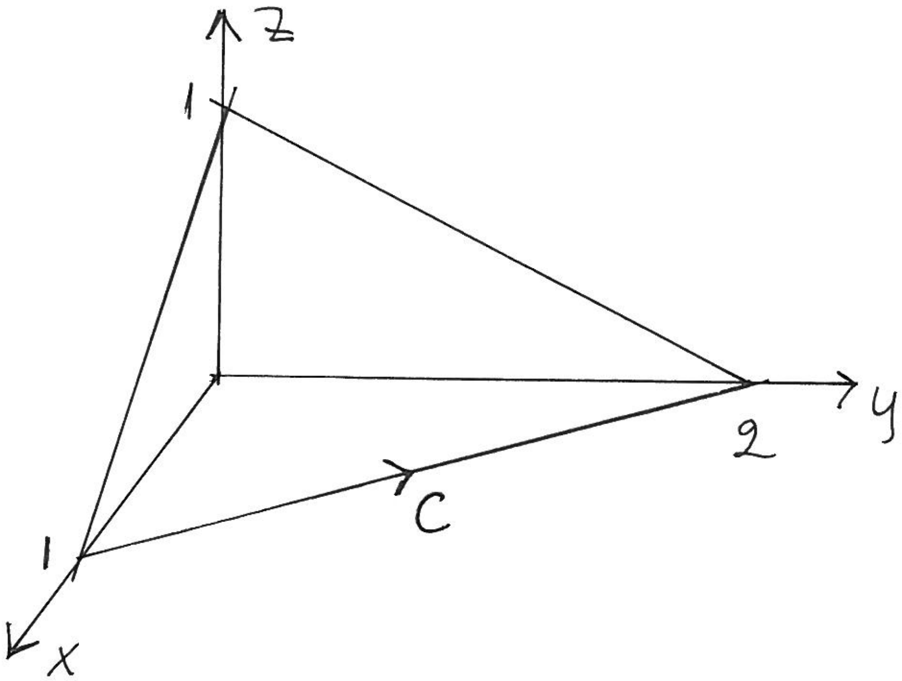
b) Planet: $2x + y + 2z = 2$.

Skisser planet:

$x = y = 0: \quad z = 1$

$x = z = 0: \quad y = 2$

$y = z = 0: \quad x = 1$



Planet skjærer koord.-aksene i de oppgitte punktene i trekanten C: $(1,0,0)$, $(0,2,0)$ og $(0,0,1)$.

Stokes teorem:

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_S \nabla \times \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS$$

der S er den delen av planet $2x + y + 2z = 2$ som er i 1. oktant.

C er da randkurven til S.

Normalvektor til planet: $\vec{N} = [2, 1, 2]$

(Alternativt: definer $g(x, y, z) = 2x + y + 2z$.
$\vec{N} = \nabla g$).

$$\vec{n} = \frac{\vec{N}}{|\vec{N}|} = \frac{[2,1,2]}{\sqrt{2^2+2^2+1}} = \frac{[2,1,2]}{\sqrt{9}} = \frac{[2,1,2]}{3}.$$

$$\nabla \times \vec{F} \cdot \vec{n} = [1, -1, 7] \cdot \frac{[2,1,2]}{3} = \frac{2-1+14}{3} = \frac{15}{3} = 5.$$

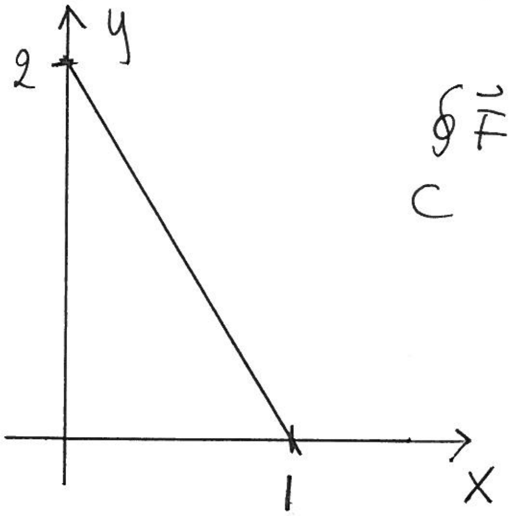
$$dS = \frac{|\vec{N}|}{|\vec{N} \cdot \vec{k}|} dA = \frac{3}{2} dA.$$

Projeksjonsplan: xy-planet. $\vec{p} = \vec{k}$.

dA er flateelement i xy-planet.

$$\Rightarrow \nabla \times \vec{F} \cdot \vec{n}\, dS = 5 \cdot \frac{3}{2} dA = \frac{15}{2} dA$$

Projeksjon av S i xy-planet: $z=0$:



$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_S \nabla \times \vec{F} \cdot \vec{n}\, dS$$

$$= \frac{15}{2} \iint_A dA$$

$= \frac{15}{2} \cdot$ areal av trekant i xy-planet

$$= \frac{15}{2} \cdot 1 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} = \underline{\underline{\frac{15}{2}}}$$

c) Divergensteoremet:

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n}\, dS = \iiint_T \nabla \cdot \vec{F}\, dV = -6 \iiint_T y\, dV$$

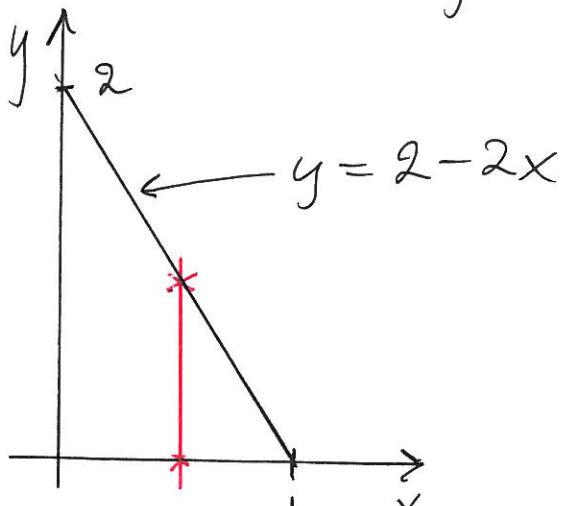
Integrasjon innenfor T, dvs. under planet i 1. oktant.
Integrasjon i z-retning først.

Planet $2x+y+2z=2 \Rightarrow$

$$2z = -2x - y + 2 \Rightarrow z = -x - \frac{y}{2} + 1.$$

Projeksjon av T i xy-planet: $z=0$:

$$2x + y = 2 \Rightarrow y = 2 - 2x.$$



$$\iiint_T \nabla \cdot \vec{F}\, dV = -6 \int_0^1 \int_0^{2-2x} \int_0^{-x-\frac{y}{2}+1} y \, dz\, dy\, dx$$

$$= -6 \iint y z \Big|_0^{-x-\frac{y}{2}+1} dy\, dx =$$

$$-6\iint y\left(-x-\frac{y}{2}+1\right)dy\,dx$$

$$=-6\iint\left(-xy-\frac{y^2}{2}+y\right)dy\,dx$$

$$=6\int x\cdot\frac{1}{2}y^2+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}y^3-\frac{1}{2}y^2\Big|_0^{2-2x}$$

$$=\int 3xy^2+y^3-3y^2\Big|_0^{2-2x}dx$$

$$=\int y^2\left[3x+y-3\right]_0^{2-2x}dx$$

$$=\int(2-2x)^2\left[3x+2-2x-3\right]dx=\int(2-2x)^2\left[x-1\right]dx$$

$$=4\int_0^1(x-1)^3dx=4\cdot\frac{1}{4}(x-1)^3\Big|_0^1=(x-1)^3\Big|_0^1$$

$$=0-1=\underline{\underline{-1}}$$