DET TEKNISK-NATURVITENSKAPELIGE FAKULTET

EKSAMEN I: ÅMA290 Matematikk 3 - vektoranalyse

DATO: 13. desember 2010 kl. 0900 - 1200

TILLATTE HJELPEMIDLER:
Rottmann: Matematisk formelsamling
Kalkulatorer: HP 30S, Casio FX82, TI-30.

Universitetet i Stavanger

OPPGAVESETTET BESTÅR AV 3 OPPGAVER PÅ 2 SIDER + 1 SIDE MED FORMLER

OPPGAVE 1

Gitt kurven C: $\mathbf{r}(t) = (2t-4)\,\mathbf{i} - (2t+1)\,\mathbf{j} \ + t\,\mathbf{k}; \quad 0 \leq t \leq 1.$

a) Beregn kurveintegralet

$$\int_C (xz + z^2)\,ds.$$

b) Vis at vektorfeltet $\mathbf{F}(x,y,z) = 4xy\mathbf{i} + (2x^2 + z)\,\mathbf{j} + y\,\mathbf{k}$ er konservativt.

c) Finn en potensialfunksjon (skalarfelt) til vektorfeltet $\mathbf{F}$.

d) Beregn kurveintegralet

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}.$$

OPPGAVE 2

Gitt vektorfeltet $\mathbf{F}(x,y,z) = (3xy^2 + 3y)\mathbf{i} + (3x^2y + 2xz^4)\,\mathbf{j} + 6z\,\mathbf{k}$.
La T være legemet avgrenset av sylinderen $x^2 + y^2 = 4$, xy -planet og planet $z = 3$.

a) Finn $div\,\mathbf{F}$.

b) (i) Bruk divergensteoremet til å beregne flateintegralet (fluksen)

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\,dS,$$

der S er randen (overflaten) til legemet T, og $\mathbf{n}$ er enhetsnormalvektor til S. $\mathbf{n}$ peker utover (fra T).
(ii) Vis at fluksen av vektorfeltet $\mathbf{H}(x,y,z) = yz\mathbf{i} - xz\,\mathbf{j} + 5y\,\mathbf{k}$ gjennom sylinderflata $x^2 + y^2 = 4$ er lik 0.

OPPGAVE 3

La S være den delen av kuleflaten $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ som ligger over planet $z = 4$, og la T være legemet avgrenset av flaten S og planet $z = 4$.

a) Finn enhetsnormalvektor til S i et vilkårlig punkt på S. Enhetsnormalvektoren skal peke innover i T.

b) Beregn flateintegralet

$$\iint_S z^2 \, dS.$$

Lykke til!

Formler:

Kurveintegral av en funksjon f langs en kurve C: $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$, $\quad a \leq t \leq b$:

$$\int_C f\,ds = \int_a^b f(\mathbf{r}(t))|\frac{d\mathbf{r}}{dt}|\,dt.$$

Kurveintegral av et vektorfelt $\mathbf{F} = F_1\mathbf{i} + F_2\mathbf{j} + F_3\mathbf{k}$, langs en kurve C: $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$, $a \leq t \leq b$:

$$\int_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{T}\,ds = \int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_C F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz = \int_a^b (F_1\frac{dx}{dt} + F_2\frac{dy}{dt} + F_3\frac{dz}{dt})\,dt.$$

Flateintegral av en funksjon f over en flate $S : g(x,y,z) = K$ (K er en konstant):

$$\iint_S f\,dS = \iint_R f\,\frac{|\nabla g|}{|\nabla g\cdot\mathbf{P}|}\,dA.$$

Stokes' teorem:

$$\oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \iint_S (\nabla\times\mathbf{F})\cdot\mathbf{n}\,dS = \iint_R (\nabla\times\mathbf{F})\cdot\frac{\pm\nabla g}{|\nabla g\cdot\mathbf{P}|}\,dA.$$

Divergensteoremet (Gauss' teorem):

$$\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS = \iiint_T \nabla\cdot\mathbf{F}\,dV.$$

$$\mathit{div}\,\mathbf{F} = \nabla\cdot\mathbf{F}, \quad \mathit{curl}\,\mathbf{F} = \nabla\times\mathbf{F}, \quad \nabla = \frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}$$

Sylinderkoordinater: $(r\cos\theta, r\sin\theta, z)$.
Kulekoordinater: $(\rho\sin\phi\cos\theta, \rho\sin\phi\sin\theta, \rho\cos\phi)$.

ÅMA 290 Matematikk 3 - vektoranalyse.

Eksamen 13. desember 2010

Løsning.

Oppgave 1.

C: $\vec{r}(t) = (2t-4)\vec{i} - (2t+1)\vec{j} + t\vec{k}$

$0 \leq t \leq 1.$

a) $x = 2t-4, \quad y = -2t-1, \quad z = t.$

$\frac{dx}{dt} = 2, \quad \frac{dy}{dt} = -2, \quad \frac{dz}{dt} = 1$

$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k} = 2\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}.$

$\left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right| = \sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1} = \sqrt{9} = 3.$

Beregn $\int_C (xz + z^2)\,ds.$

$ds = \left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right| dt = 3\,dt.$

$\int_C (xz + z^2)\,ds = \int_0^1 \left[(2t-4)\cdot t + t^2\right]\cdot 3\,dt$

$= 3\int (3t^2 - 4t)\,dt = 3\left[t^3 - 2t\right]_0^1 = 3[1-2]$

$\underline{\underline{= -3}}$

b) $\vec{F}(x,y,z) = 4xy\,\vec{i} + (2x^2+z)\,\vec{j} + y\,\vec{k}$.

Vis at $\vec{F}$ er konservativt:

$$\nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 4xy & 2x^2+z & y \end{vmatrix}$$

$$= \vec{i}\left[\frac{\partial}{\partial y} y - \frac{\partial}{\partial z}(2x^2+z)\right] - \vec{j}\left[\frac{\partial}{\partial x} y - \frac{\partial}{\partial z} 4xy\right]$$
$$+ \vec{k}\left[\frac{\partial}{\partial x}(2x^2+z) - \frac{\partial}{\partial y} 4xy\right]$$

$$= \vec{i}[1-1] - \vec{j}[0-0] + \vec{k}[4x-4x] = \vec{0}.$$

$\nabla \times \vec{F} = \vec{0} \Rightarrow \vec{F}$ er konservativt felt.

c) Finn potensialfunksjon f $(\vec{F} = \nabla f)$.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4xy \qquad \text{I}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2x^2 + z \qquad \text{II}$$
$$\frac{\partial f}{\partial z} = y \qquad \text{III}$$

I: $\frac{\partial f}{\partial x} = 4xy \Rightarrow f = \int 4xy\,dx = 4y \cdot \frac{1}{2}x^2 + C_1(y,z)$
$= 2x^2y + C_1(y,z)$

Deriver mhp. y:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2x^2 + \frac{\partial C_1}{\partial y} \underset{\text{fra II}}{=} 2x^2 + z \quad \Rightarrow$$

$$\frac{\partial C_1}{\partial y} = z \Rightarrow C_1 = \int z\,dy = zy + C_2(z)$$

$$\Rightarrow f = 2x^2y + yz + C_2(z).$$

Deriver mhp. z: $\frac{\partial f}{\partial z} = y + C_2' \underset{\text{fra III}}{=} y \Rightarrow$

$C_2' = 0 \Rightarrow C_2 = \text{konstant}.$

$$\Rightarrow \underline{\underline{f = 2x^2y + yz}}.$$

d) Beregn $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$.

$C: x = 2t-4, \ y = -2t-1, \ z = t.$

$\vec{F}$ konservativ $\Rightarrow \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_A^B df = f\Big|_A^B,$

der A og B er koordinatene til hhv. start- og sluttpunkt på C.

A: $t=0$: $x = -4, \ y = -1, \ z = 0$

B: $t=1$: $x = -2, \ y = -3, \ z = 1$

$$\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = 2x^2y + yz \Big|_{(-4,-1,0)}^{(-2,-3,1)}$$

$$= 2\cdot(-2)^2\cdot(-3) + (-3)\cdot 1 - [2\cdot(-4)^2\cdot(-1) + 0]$$

$$= -8\cdot 3 - 3 - (-32) = -24 - 3 + 32 = \underline{5}$$

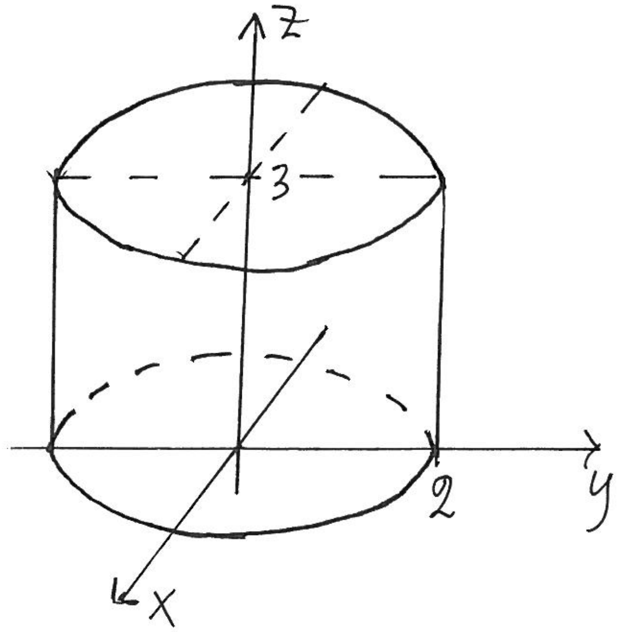
Oppgave 2

$$\vec{F}(x,y,z) = (3xy^2 + 3y)\vec{i} + (3x^2y + 2xz^4)\vec{j} + 6z\vec{k}.$$

a) $$\nabla\cdot\vec{F} = \frac{\partial}{\partial x}(3xy^2+3y) + \frac{\partial}{\partial y}(3x^2y + 2xz^4) + \frac{\partial}{\partial z}6z$$

$$= 3y^2 + 3x^2 + 6 = \underline{\underline{3(x^2+y^2+2)}}$$

b)



(i) Divergensteoremet:

$$\iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,dS = \iiint_T \nabla\cdot\vec{F}\,dV$$

$$= \iiint_T [3(x^2+y^2)+6]\,dV \underset{\uparrow}{=}$$

sylinderkoord.

$$\int_0^{2\pi}\int_0^2\int_0^3 3r^2\,dz\,r\,dr\,d\theta + 6\iiint_T dV$$

$$= 3\iiint r^3\,dz\,dr\,d\theta + 6\cdot \text{volum av sylinder}$$

$$= 3\iint r^3\, z\Big|_0^3 dr\,d\theta \quad + 6\cdot\pi\cdot 2^2\cdot 3$$

$$= 9\iint r^3\,dr\,d\theta \quad + 72\pi$$

$$= 9\int \frac{1}{4}r^4\Big|_0^2 d\theta \quad + 72\pi = \frac{9}{4}\int 2^4\,d\theta + 72\pi$$

$$= \frac{9}{4}\cdot 16\cdot 2\pi + 72\pi = 72\pi + 72\pi = \underline{\underline{144\pi}}$$

(ii) $\vec{H}(x,y,z) = yz\,\vec{i} - xz\,\vec{j} + 5y\,\vec{k}$.

Definer $g(x,y,z) = x^2+y^2$. Finn normalvektor $\vec{n}$:

$\nabla g = 2x\vec{i} + 2y\vec{j}$. $\quad \vec{n} = \dfrac{\nabla g}{|\nabla g|} = \dfrac{2x\vec{i}+2y\vec{j}}{|\nabla g|}$

$$\vec{H} \cdot \vec{n} = [yz\vec{i} - xz\vec{j} + 5y\vec{k}] \cdot$$

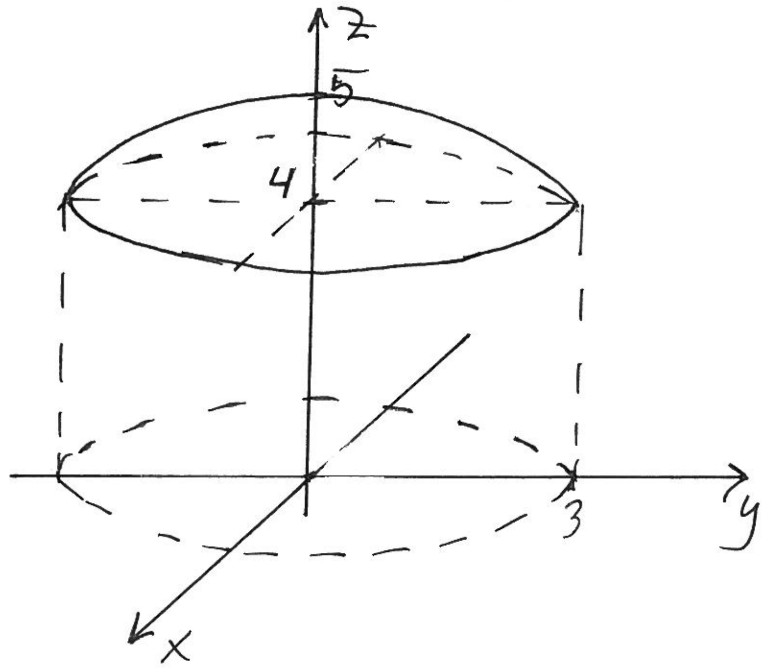
$$\frac{1}{|\nabla g|}[2x\vec{i} + 2y\vec{j}] =$$

$$\frac{1}{\nabla g}[2xyz - 2xyz] = 0 \implies$$

Fluksen av $\vec{H} = \iint \vec{H} \cdot \vec{n}\, dS = 0.$

Oppgave 3

$S:\ x^2 + y^2 + z^2 = 25, \quad z \geq 4$



a) Definer $g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$

Kuleflata er nivåflata $g = 25$.

Enhetsnormalvektor $\vec{n}$:

$\nabla g = 2x\vec{i} + 2y\vec{j} + 2z\vec{k}$ peker utover.

$\vec{n}$ skal peke innover $\Rightarrow$

$$\vec{n} = -\frac{\nabla g}{|\nabla g|}.$$

$$|\nabla g| = 2\sqrt{x^2+y^2+z^2} = 2\sqrt{25} = 2 \cdot 5 = 10.$$

på kuleflata

$$\vec{n} = -\frac{\nabla g}{|\nabla g|} = -\frac{2x\vec{i} + 2y\vec{j} + 2z\vec{k}}{10}$$

$$= -\frac{1}{5}[x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}], \text{ der } z = \sqrt{25-x^2-y^2}.$$

b) Skjæring kuleflate og $z=4 \Rightarrow$

$$x^2+y^2+4^2 = 25 \Rightarrow x^2+y^2 = 25-16 = 9.$$

Sirkel med radius $= 3$.

Beregn $\iint_S z^2 dS$.

Projeksjonsplan: xy-planet.

$\nabla g = 2x\vec{i} + 2y\vec{j} + 2z\vec{k}$, fra pkt. a.

$\nabla g \cdot \vec{k} = |2z| = 2z$.

$$dS = \frac{|\nabla g|}{|\nabla g \cdot \vec{k}|} dA = \frac{10}{2z} dA = \frac{5}{z} dA$$

$$\iint z^2 dS = \iint z^2 \frac{5}{z} dA = 5 \iint z\, dA =$$

$$5\int_0^{2\pi}\int_0^3 z \, r\,dr\,d\theta \;=\; 5\iint \sqrt{25-x^2-y^2}\; r\,dr\,d\theta$$

på kuleflata

$$= 5\iint \sqrt{25-r^2}\; r\,dr\,d\theta = 5\iint u^{\frac{1}{2}}\, r\left(-\frac{du}{2r}\right) d\theta$$

Subst.:

$u = 25 - r^2$

$\frac{du}{dr} = -2r$

$dr = -\frac{du}{2r}$

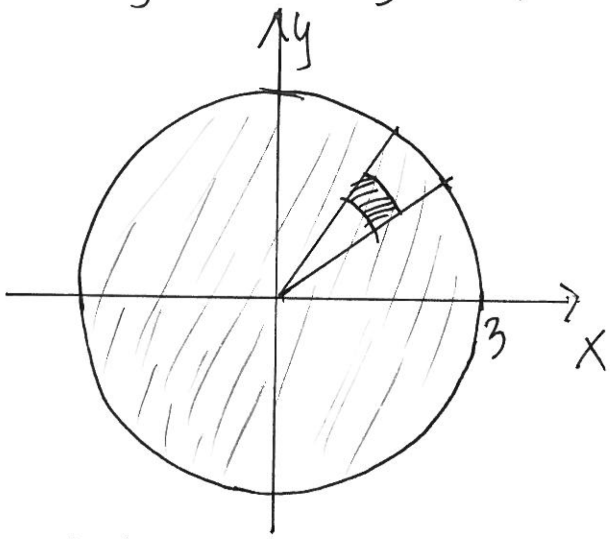
$$= -\frac{5}{2}\iint u^{\frac{1}{2}}\,du\,d\theta = -\frac{5}{2}\cdot\frac{2}{3}u^{3/2}\int d\theta$$

$$= -\frac{5}{3}\left(25-r^2\right)^{3/2}\Big|_0^3 \cdot 2\pi$$

$$= -\frac{5}{3}\left[\left(25-3^2\right)^{3/2} - 25^{3/2}\right]\cdot 2\pi$$

$$= -\frac{10\pi}{3}\left[16^{3/2} - 5^{3/2}\right] = -\frac{10\pi}{3}\left[4^3 - 5^3\right]$$

$$= -\frac{10\pi}{3}\left[64-125\right] = -\frac{10\pi}{3}\cdot(-61) = \underline{\underline{\frac{610\pi}{3}}}$$



Projeksjon i xy-planet.