DET TEKNISK-NATURVITENSKAPELIGE FAKULTET

EKSAMEN I: ÅMA290 Matematikk 3 - vektoranalyse

DATO: 21. februar 2012 kl. 0900 - 1200

TILLATTE HJELPEMIDLER:
Rottmann: Matematisk formelsamling
Kalkulatorer: HP 30S, Casio FX82, TI-30, Citizen SR-270X.

Universitetet i Stavanger

OPPGAVESETTET BESTÅR AV 3 OPPGAVER PÅ 2 SIDER + 1 SIDE MED FORMLER

OPPGAVE 1

Gitt kurven C: $\mathbf{r}(t) = 3\cos t\,\mathbf{i} + 5\sin t\,\mathbf{j} + 4\cos t\,\mathbf{k}$; $0 \le t \le \pi/2$.

a) Beregn kurveintegralet

$$\int_C y^2 z\, ds.$$

b) Vis at vektorfeltet $\mathbf{F}(x,y,z) = (y+2z)\mathbf{i} + (x+2y)\,\mathbf{j} + 2x\,\mathbf{k}$ er konservativt.

c) Finn en potensialfunksjon (skalarfelt) til vektorfeltet $\mathbf{F}$.

d) Beregn kurveintegralet

$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}.$$

OPPGAVE 2

Gitt vektorfeltet $\mathbf{F}(x,y,z) = 3yz\mathbf{i} + 2xy\,\mathbf{j} - (xz+y)\,\mathbf{k}$.
La T være den delen av 1. oktant som ligger under planet $2x + y + z = 2$.

a) Finn $div\,\mathbf{F}$.

b) Bruk divergensteoremet til å beregne flateintegralet (fluksen)

$$\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS,$$

der S er randen (overflaten) til legemet T, og $\mathbf{n}$ er enhetsnormalvektor til S. $\mathbf{n}$ peker utover (fra T).

OPPGAVE 3

La S være den delen av kuleflaten $x^2+y^2+z^2=4$ som ligger over xy -planet $(z \geq 0)$, og la T være området avgrenset av flaten S og xy -planet.

a) Finn enhetsnormalvektor til S i et vilkårlig punkt på S. Enhetsnormalvektoren skal peke i retning ut fra T.

b) Beregn flateintegralet

$$\iint_S z^3 \, dS.$$

c) Gitt vektorfeltet $\mathbf{F}(x,y,z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$. Beregn fluksen av $\mathbf{F}$,

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS,$$

i retning ut fra T. ($\mathbf{n}$ er enhetsnormalvektor til S).

Lykke til!

Formler:

Kurveintegral av en funksjon f langs en kurve C: $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$, $\quad a \leq t \leq b$:

$$\int_C f\,ds = \int_a^b f(\mathbf{r}(t))|\frac{d\mathbf{r}}{dt}|\,dt.$$

Kurveintegral av et vektorfelt $\mathbf{F} = F_1\mathbf{i} + F_2\mathbf{j} + F_3\mathbf{k}$, langs en kurve C: $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$, $a \leq t \leq b$:

$$\int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\,ds = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C F_1dx + F_2dy + F_3dz = \int_a^b (F_1\frac{dx}{dt} + F_2\frac{dy}{dt} + F_3\frac{dz}{dt})\,dt.$$

Flateintegral av en funksjon f over en flate $S : g(x, y, z) = K$ (K er en konstant):

$$\iint_S f\,dS = \iint_R f\,\frac{|\nabla g|}{|\nabla g \cdot \mathbf{P}|}\,dA.$$

Stokes' teorem:

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n}\,dS = \iint_R (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \frac{\pm\nabla g}{|\nabla g \cdot \mathbf{P}|}\,dA.$$

Divergensteoremet (Gauss' teorem):

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\,dS = \iiint_T \nabla \cdot \mathbf{F}\,dV.$$

$$div\,\mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{F}, \quad curl\,\mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F}, \quad \nabla = \frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}$$

Sylinderkoordinater: $(r\cos\theta, r\sin\theta, z)$.
Kulekoordinater: $(\rho\sin\phi\cos\theta, \rho\sin\phi\sin\theta, \rho\cos\phi)$.

ÅMA 290 Matematikk 3 – vektoranalyse.

Eksamen 21. februar 2012

Oppgave 1.

$C: \quad \vec{r}(t) = 3\cos t\,\vec{i} + 5\sin t\,\vec{j} + 4\cos t\,\vec{k}$

$0 \le t \le \pi/2$

På komponentform:

$x = 3\cos t, \quad y = 5\sin t, \quad z = 4\cos t.$

a) Beregn $\int_C y^2 z\, ds.$

$\frac{dx}{dt} = -3\sin t, \quad \frac{dy}{dt} = 5\cos t, \quad \frac{dz}{dt} = -4\sin t.$

$ds = \left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right| dt.$

$\frac{d\vec{r}}{dt} = -3\sin t\,\vec{i} + 5\cos t\,\vec{j} - 4\sin t\,\vec{k}$

$$\left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right| = \sqrt{9\sin^2 t + 25\cos^2 t + 16\sin^2 t}$$

$$= \sqrt{25\sin^2 t + 25\cos^2 t} = 5\sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t} = 5.$$

$ds = 5\,dt$

$$\int_C y^2 z\,ds = \int_0^{\pi/2} 25\sin^2 t \cdot 4\cos t \cdot 5\,dt$$

$$= 25 \cdot 4 \cdot 5 \int \sin^2 t \cos t\,dt = 500 \int u^2\,du$$

Subst:
$u = \sin t$
$\frac{du}{dt} = \cos t$
$\Rightarrow du = \cos t\,dt$

$$= 500 \cdot \frac{1}{3} u^3 =$$

$$\frac{500}{3} \sin^3 \Big|_0^{\pi/2} = \underline{\underline{\frac{500}{3}}}$$

b) $\vec{F}(x,y,z) = (y+2z)\vec{i} + (x+2y)\vec{j} + 2x\vec{k}$.

Vis at $\vec{F}$ er konservativ:

$$\nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y+2z & x+2y & 2x \end{vmatrix} =$$

$$\vec{i}\left[\frac{\partial}{\partial y} 2x - \frac{\partial}{\partial z}(x+2y)\right]$$

$$-\vec{j}\left[\frac{\partial}{\partial x} 2x - \frac{\partial}{\partial z}(y+2z)\right]$$

$$+\vec{k}\left[\frac{\partial}{\partial x}(x+2y) - \frac{\partial}{\partial y}(y+2z)\right]$$

$$= 0\vec{i} - \vec{j}[2-2] + k[1-1] = \vec{0}.$$

$\nabla \times \vec{F} = 0 \Rightarrow \vec{F}$ er konservativ.

c) Finn potensialfunksjon f $(\vec{F} = \nabla f)$.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y + 2z \qquad \text{I}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x + 2y \qquad \text{II}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = 2x \qquad \text{III}$$

I $\quad \frac{\partial f}{\partial x} = y + 2z \Rightarrow f = \int (y + 2z)\,dx$

$$= xy + 2xz + C_1(y, z)$$

Deriver mhp. y:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x + \frac{\partial C_1}{\partial y} \underset{\uparrow}{=} x + 2y \Rightarrow \frac{\partial C_1}{\partial y} = 2y$$

fra II

$$\Rightarrow C_1 = 2\int y\,dy = y^2 + C_2(z).$$

$$\Rightarrow f = xy + 2xz + y^2 + C_2(z).$$

Deriver mhp. z:

$$\frac{\partial f}{\partial z} = 2x + C_2' \underset{\uparrow}{=} 2x \Rightarrow C_2' = 0 \Rightarrow C_2 = C.$$

fra III

$\Rightarrow f = xy + 2xz + y^2 \quad (+C).$

d) Beregn $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$.

$C: \vec{r} = 3\cos t\,\vec{i} + 5\sin t\,\vec{j} + 4\cos t\,\vec{k}$

$\vec{r}(0) = (3, 0, 4), \quad \vec{r}(\frac{\pi}{2}) = (0, 5, 0)$

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = f \Big|_{\vec{r}(0)}^{r(\frac{\pi}{2})} = xy + 2xz + y^2 \Big|_{(3,0,4)}^{(0,5,0)}$$

$$= 0 + 0 + 5^2 - (0 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + 0)$$

$$= 25 - 24 = \underline{\underline{1}}$$

Oppgave 2

$\vec{F}(x, y, z) = 3yz\,\vec{i} + 2xy\,\vec{j} - (xz + y)\vec{k}$

a) $\nabla \cdot \vec{F} = \frac{\partial}{\partial x} 3yz + \frac{\partial}{\partial y} 2xy - \frac{\partial}{\partial z}(xz + y)$

$$= 0 + 2x - x = \underline{\underline{x}}$$

b) Divergensteoremet:

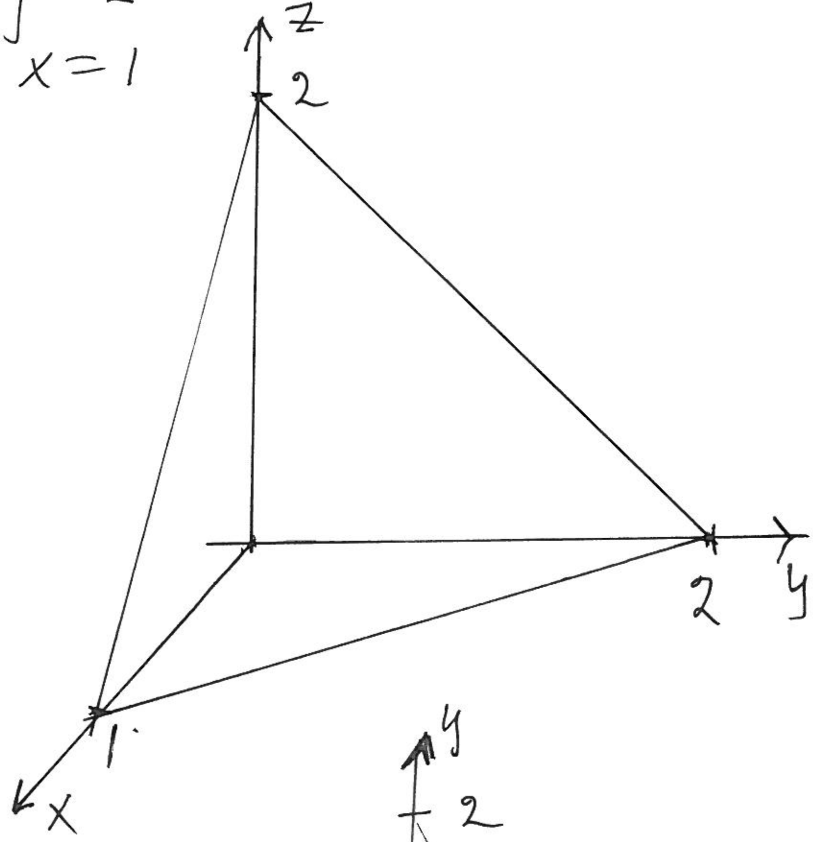
$$\iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,dS = \iiint_T \nabla\cdot\vec{F}\,dV = \iiint_T x\,dV.$$

Skisser planet $2x+y+z=2$

$x=y=0 \Rightarrow z=2$

$x=z=0 \Rightarrow y=2$

$y=z=0 \Rightarrow x=1$



Integrasjon innenfor T, dvs. under planet i 1. okt.

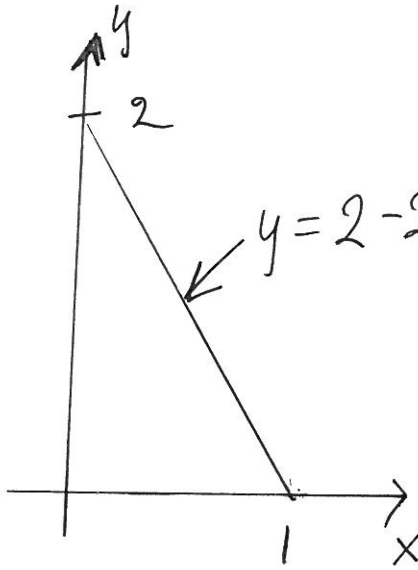
Integrasjon i z-retning først.

Plan $2x+y+z=2$

$\Rightarrow z = 2-2x-y.$

Projeksjon av planet i xy-planet: $z=0$

$2x+y=2 \Rightarrow y=2-2x$



$$\iiint_T \nabla\cdot\vec{F}\,dV = \int_0^1\int_0^{2-2x}\int_0^{2-2x-y} x\,dz\,dy\,dx$$

$$= \iint xz\Big|_0^{2-2x-y} dy\,dx$$

$$= \iint x(2-2x-y)\,dy\,dx$$

$$= \iint (2x-2x^2-xy)\,dy\,dx$$

$$= \int_0^1 2xy - 2x^2y - \tfrac{1}{2}xy^2\Big|_0^{2-2x} dx$$

$$= \int y\left[2x-2x^2-\tfrac{1}{2}xy\right]_0^{2-2x} dx$$

$$= \int (2-2x)\left[2x-2x^2-\tfrac{1}{2}x(2-2x)\right] dx$$

$$= \int 2(1-x)\left[x-x^2\right] dx = \int 2x(1-x)^2\,dx$$

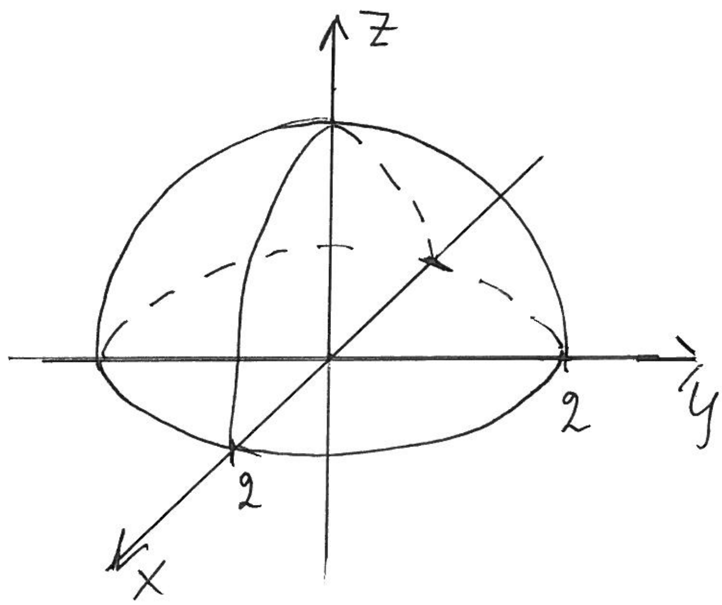
$$= \int 2x(1-2x+x^2)\,dx = \int (2x-4x^2+2x^3)\,dx$$

$$= x^2-\tfrac{4}{3}x^3+\tfrac{1}{2}x^4\Big|_0^1 = 1-\tfrac{4}{3}+\tfrac{1}{2} = \frac{6-8+3}{6}$$

$$= \underline{\underline{\frac{1}{6}}}$$

Oppgave 3

$S: x^2+y^2+z^2=4$



a) Definer $g(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$

Kuleflata er nivåflata $g=4$.

$$\nabla g = \frac{\partial g}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial g}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial g}{\partial z}\vec{k} =$$

$$2x\vec{i} + 2y\vec{j} + 2z\vec{k}.$$

$\vec{n}$ skal peke ut av övre halvkuleflate

$\Rightarrow \vec{n}$ peker oppover, og det gjör ∇g.

$$|\nabla g| = 2\sqrt{x^2+y^2+z^2} \underset{\text{på kuleflata}}{=} 2\sqrt{4} = 2\cdot 2 = 4$$

$$\vec{n} = \frac{\nabla g}{|\nabla g|} = \frac{2x\vec{i} + 2y\vec{j} + 2z\vec{k}}{4}$$

$$= \underline{\underline{\frac{x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}}{2}}}$$

b) $\iint_S z^3 \, dS$

$$dS = \frac{|\nabla g|}{|\nabla g \cdot \vec{P}|} \, dA.$$

Projeksjonsplan : xy-planet.

$\vec{P} = \vec{k}$. $|\nabla g \cdot \vec{k}| = |2z| = 2z$.

$$dS = \frac{|\nabla g|}{|\nabla g \cdot \vec{k}|} dA = \frac{4}{2z} dA = \frac{2}{z} dA.$$

$$\iint_S z^3 \, dS = \iint z^3 \cdot \frac{2}{z} dA = 2 \iint z^2 \, dA$$

$$= 2 \int_0^{2\pi} \int_0^2 (4 - r^2) \, r \, dr \, d\theta =$$

$x^2 + y^2 + z^2 = 4$

$\Rightarrow$

$z^2 = 4 - x^2 - y^2$

$= 4 - r^2$

$$2 \iint (4r - r^3) \, dr \, d\theta$$

$$= 2 \int 2r^2 - \tfrac{1}{4} r^4 \Big|_0^2 \, d\theta$$

$$= 2 \int \left(2 \cdot 2^2 - \tfrac{1}{4} \cdot 2^4\right) d\theta =$$

$$2 \cdot \int_0^{2\pi} (8 - 4) \, d\theta = 2 \cdot 4 \cdot 2\pi \underline{\underline{= 16\pi}}$$

c) $\vec{F} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

Beregn $\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS$.

$$\vec{n} = \frac{x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}}{2} \implies$$

$$\vec{F} \cdot \vec{n} = \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{på } S}}{=} \frac{1}{2} \cdot 4 = 2.$$

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS = 2 \iint_S dS = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 4\pi r^2$$

$$= 4\pi \cdot 2^2 = \underline{\underline{16\pi.}}$$

Alternativ for $\iint_S dS$:

Kulekoordinater: $\iint dS = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \rho^2 \sin\varphi \, d\varphi \, d\theta$

$$= 4 \iint \sin\varphi \, d\varphi \, d\theta = 4 \int -\cos\varphi \Big|_0^{\pi/2} d\theta$$

$$= -4 \int (\cos \pi/2 - \cos 0) \, d\theta$$

$$= -4 \int (-1) \, d\theta = 4 \cdot 2\pi = \underline{8\pi}$$

Alternativ: sylinderkoord.