DET TEKNISK-NATURVITENSKAPELIGE FAKULTET

EKSAMEN I: ÅMA290 Matematikk 3 - vektoranalyse

DATO: 13. desember 2012 kl. 0900 - 1200

TILLATTE HJELPEMIDLER:
Rottmann: Matematisk formelsamling
Kalkulatorer: HP 30S, Casio FX82, TI-30, Citizen SR-270X.

Universitetet i Stavanger

OPPGAVESETTET BESTÅR AV 3 OPPGAVER PÅ 2 SIDER + 1 SIDE MED FORMLER

OPPGAVE 1

Gitt kurven C: $\mathbf{r}(t) = (2t + \sqrt{6})\,\mathbf{i} + (t - \sqrt{6})\,\mathbf{j} \;- (t+1)\,\mathbf{k}; \quad 0 \le t \le 1.$

a) Finn enhetstangentvektor til C.

b) Beregn kurveintegralet

$$\int_C (x - 2y + \sqrt{6}\,z)\,ds.$$

Gitt vektorfeltet $\mathbf{F}(x,y,z) = z^2\,\mathbf{i} + 2y\,\mathbf{j} - 2x\,\mathbf{k}$.

c) Beregn kurveintegralet

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}.$$

OPPGAVE 2

La T være (det endelige) området innenfor sylinderen $x^2 + y^2 = 4$, med øvre begrensning paraboloiden $z = x^2 + y^2$ og nedre begrensning xy -planet.
La S være den delen av paraboloiden som ligger mellom xy -planet og planet $z = 4$.

a) Beregn integralet

$$\iiint_T z\,dV.$$

b) Finn fluksen, $\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\,dS$, av vektorfeltet $\mathbf{F}(x,y,z) = y^2\mathbf{i} + xy\,\mathbf{j} + 4xy^2\,\mathbf{k}$ gjennom S. $\mathbf{n}$ er en enhetsnormalvektor til S.

OPPGAVE 3

Gitt vektorfeltet $\mathbf{F}(x, y, z) = 2z\mathbf{i} + (2z - 3y)\,\mathbf{j} + (3x^2 + y)\,\mathbf{k}$.
La T være den delen av 1. oktant som ligger under planet $2x + y + 2z = 4$.

a) Finn $div\,\mathbf{F}$ og $curl\,\mathbf{F}$.

b) Bruk divergensteoremet til å beregne flateintegralet

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS,$$

der S er randen (overflaten) til legemet T, og $\mathbf{n}$ er enhetsnormalvektor til S. $\mathbf{n}$ peker utover (fra T).

c) La C være trekanten med hjørner i $(2, 0, 0)$, $(0, 4, 0)$ og $(0, 0, 2)$. Omløpsretning langs C (orientering) er mot urviser, sett ovenfra.
Beregn kurveintegralet

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}.$$

Lykke til!

Formler:

Kurveintegral av en funksjon f langs en kurve C: $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$, $\quad a \leq t \leq b$:

$$\int_C f\,ds = \int_a^b f(\mathbf{r}(t))\left|\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right|dt.$$

Kurveintegral av et vektorfelt $\mathbf{F} = F_1\mathbf{i} + F_2\mathbf{j} + F_3\mathbf{k}$, langs en kurve C: $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$, $a \leq t \leq b$:

$$\int_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{T}\,ds = \int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_C F_1dx + F_2dy + F_3dz = \int_a^b (F_1\frac{dx}{dt} + F_2\frac{dy}{dt} + F_3\frac{dz}{dt})\,dt.$$

Flateintegral av en funksjon f over en flate $S: g(x,y,z) = K$ (K er en konstant):

$$\iint_S f\,dS = \iint_R f\,\frac{|\nabla g|}{|\nabla g\cdot\mathbf{P}|}\,dA.$$

Stokes' teorem:

$$\oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \iint_S (\nabla\times\mathbf{F})\cdot\mathbf{n}\,dS = \iint_R (\nabla\times\mathbf{F})\cdot\frac{\pm\nabla g}{|\nabla g\cdot\mathbf{P}|}\,dA.$$

Divergensteoremet (Gauss' teorem):

$$\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS = \iiint_T \nabla\cdot\mathbf{F}\,dV.$$

$$\mathit{div}\,\mathbf{F} = \nabla\cdot\mathbf{F}, \quad \mathit{curl}\,\mathbf{F} = \nabla\times\mathbf{F}, \quad \nabla = \frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}$$

Sylinderkoordinater: $(r\cos\theta, r\sin\theta, z)$.
Kulekoordinater: $(\rho\sin\phi\cos\theta, \rho\sin\phi\sin\theta, \rho\cos\phi)$.

ÅMA 290 Matematikk 3 - vektoranalyse

Eksamen 13. desember 2012.

Løsning

Oppgave 1

Kurven C:

$$\vec{r}(t) = (2t+\sqrt{6})\vec{i} + (t-\sqrt{6})\vec{j} - (t+1)\vec{k}$$

$$0 \le t \le 1$$

Dvs.: $x = 2t+\sqrt{6} \Rightarrow \frac{dx}{dt} = 2$

$y = t-\sqrt{6} \Rightarrow \frac{dy}{dt} = 1$

$z = -(t+1) \Rightarrow \frac{dz}{dt} = -1$

a) Enhetstangentvektor:

$$\vec{T} = \frac{\frac{d\vec{r}}{dt}}{\left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right|}$$

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} = \sqrt{2^2+1+(-1)^2}$$

$$= \sqrt{6} \Rightarrow$$

$$\vec{T} = \frac{2\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}}{\sqrt{6}}$$

b) $ds = \left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right| dt = \sqrt{6}\, dt$.

$$\int_C (x - 2y + \sqrt{6} z)\, ds = \sqrt{6} \int_0^1 (x - 2y + \sqrt{6}\, z)\, dt$$

$$= \sqrt{6} \int_0^1 \left[(2t + \sqrt{6}) - 2(t - \sqrt{6}) + \sqrt{6}(-(t+1)) \right] dt$$

$$= \sqrt{6} \int \left[2t + \sqrt{6} - 2t + 2\sqrt{6} - \sqrt{6}\, t - \sqrt{6} \right] dt$$

$$= \sqrt{6} \int (2\sqrt{6} - \sqrt{6}\, t)\, dt = \int_0^1 (12 - 6t)\, dt$$

$$= 12t - 3t^2 \Big|_0^1 = 12 - 3 = \underline{\underline{9}}$$

c) $\vec{F} = z^2 \vec{i} + 2y \vec{j} - 2x \vec{k}$.

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^1 \left(\vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} \right) dt$$

$$= \int \left(F_1 \frac{dx}{dt} + F_2 \frac{dy}{dt} + F_3 \frac{dz}{dt} \right) dt$$

$$= \int \left(z^2 \frac{dx}{dt} + 2y \frac{dy}{dt} - 2x \frac{dz}{dt} \right) dt$$

$$= \int \left[(-(t+1))^2 \cdot 2 + 2(t - \sqrt{6}) \cdot 1 - 2(2t + \sqrt{6})(-1) \right] dt$$

$$= \int_0^1 \left[(t+1)^2 \cdot 2 + 2t - 2\sqrt{6} + 4t + 2\sqrt{6} \right] dt$$

$$= \int \left[(t^2 + 2t + 1) \cdot 2 + 6t \right] dt$$

$$= \int (2t^2 + 10t + 2)\, dt = \frac{2}{3}t^3 + 5t^2 + 2t \Big|_0^1$$

$$= \frac{2}{3} + 5 + 2 = \frac{2}{3} + 7 = \underline{\underline{\frac{23}{3}}}$$

Oppgave 2

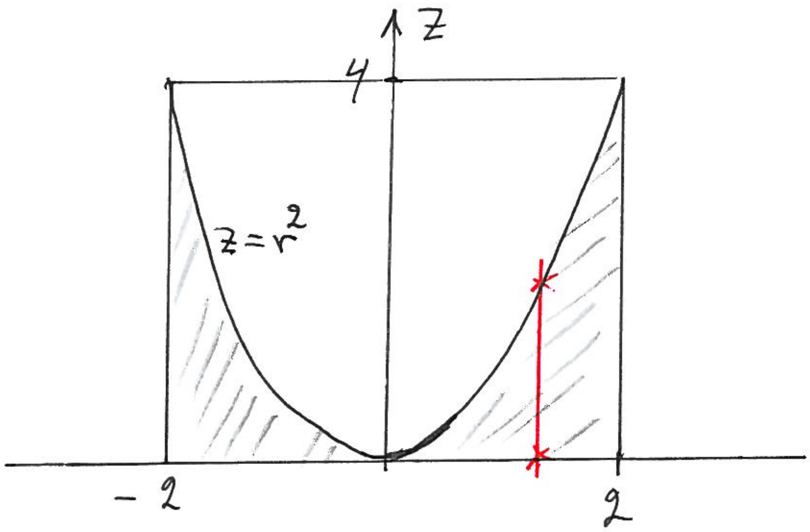
Sylinder: $x^2 + y^2 = 4$.

Paraboloide: $z = x^2 + y^2$.

Skjæring mellom sylinder og paraboloide:

$$x^2 + y^2 = 4, \quad \text{og } z = 4.$$

Sirkel med radius $= 2$, i $z = 4$.



Tverrsnitt gjennom z-aksen.

Paraboloide i sylinderkoord.: $z = r^2$

a) $\iiint_T z\,dV = \int_0^{2\pi}\int_0^{2}\int_0^{r^2} z\,dz\,r\,dr\,d\theta$

(sylinderkoord.)

$= \frac{1}{2}\iint z^2 \Big|_0^{r^2} r\,dr\,d\theta = \frac{1}{2}\iint r^5\,dr\,d\theta$

$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}\int r^6\Big|_0^2 d\theta = \frac{1}{12}\int_0^{2\pi} 2^6\,d\theta$

$= \frac{1}{3\cdot 2^2}\cdot 2^6\cdot 2\pi = \frac{1}{3}\cdot 2^4\cdot 2\pi = \underline{\underline{\frac{32\pi}{3}}}$

b) $\vec{F} = y^2\vec{i} + xy\vec{j} + 4xy^2\vec{k}$.

Finn fluksen $\iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,dS$.

Definer $g(x,y,z) = x^2 + y^2 - z$

Paraboloiden = nivåflaten $g = 0$.

$\nabla g = 2x\vec{i} + 2y\vec{j} - \vec{k}$ er en normal til S. En enhetsnormalvektor er

$\vec{n} = \frac{\nabla g}{|\nabla g|} = \frac{1}{\nabla g}[2x\vec{i} + 2y\vec{j} - \vec{k}]$

$$\vec{F}\cdot\vec{n} = [y^2, xy, 4xy^2]\cdot\frac{[2x, 2y, -1]}{|\nabla g|}$$

$$= \frac{1}{\nabla g}\left[2xy^2 + 2xy^2 - 4xy^2\right] = 0 \Rightarrow$$

<u>Fluks = 0</u>

<u>Oppgave 3</u>

$$\vec{F} = 2z\vec{i} + (2z-3y)\vec{j} + (3x^2+y)\vec{k}$$

a) $$\nabla\cdot\vec{F} = \frac{\partial}{\partial x}(2z) + \frac{\partial}{\partial y}(2z-3y) + \frac{\partial}{\partial z}(3x^2+y)$$

$$= 0 - 3 + 0 = \underline{\underline{-3}}$$

$$\nabla\times\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2z & 2z-3y & 3x^2+y \end{vmatrix}$$

$$= \vec{i}\left[\frac{\partial}{\partial y}(3x^2+y) - \frac{\partial}{\partial z}(2z-3y)\right]$$

$$-\vec{j}\left[\frac{\partial}{\partial x}(3x^2+y) - \frac{\partial}{\partial z}(2z)\right]$$

$$+\vec{k}\left[\frac{\partial}{\partial x}(2z-3y) - \frac{\partial}{\partial y}(2z)\right]$$

$$= \vec{i}(1-2) - \vec{j}(6x-2) + 0 = \underline{\underline{-\vec{i} + (2-6x)\vec{j}}}$$

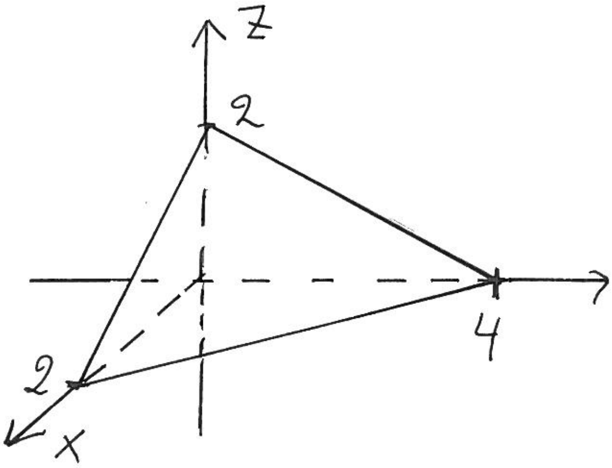
b) Planet $2x+y+2z=4$

Skisser planet i 1. oktant:

$x=y=0 \Rightarrow z=2$

$x=z=0 \Rightarrow y=4$

$y=z=0 \Rightarrow x=2$



Divergensteoremet:

$$\iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,dS = \iiint_T \nabla\cdot\vec{F}\,dV = \iiint_T -3\,dV$$

$$= -3\cdot V = -3\cdot\frac{1}{3}Ah = -2\cdot 4\cdot\frac{1}{2}\cdot 2 = \underline{\underline{-8}}$$

(Alternativ: regn ut trippelintegralet).

c) Stokes teorem: $\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \iint_S (\nabla\times\vec{F})\cdot\vec{n}\,dS$

La S være den delen av planet $2x+y+2z=4$ i 1. oktant som skjærer koordinataksene i $(2,0,0)$, $(0,4,0)$ og $(0,0,2)$.

C er randkurven til S

Normalvektor til planet:

$\vec{N} = [2,1,2]$.

Enhetsnormalvektor:

$$\vec{n} = \frac{\vec{N}}{|\vec{N}|} = \frac{[2,1,2]}{\sqrt{2^2+1+2^2}} = \frac{[2,1,2]}{3}$$

$$\nabla \times \vec{F} \cdot \vec{n} = [-1,\ 2-6x,\ 0] \cdot \frac{[2,1,2]}{3}$$

$$= \frac{-2+2-6x}{3} = \frac{-6x}{3} = \underline{-2x}$$

$$dS = \frac{|\vec{N}|}{|\vec{N} \cdot \vec{k}|} dA = \frac{3}{2} dA$$

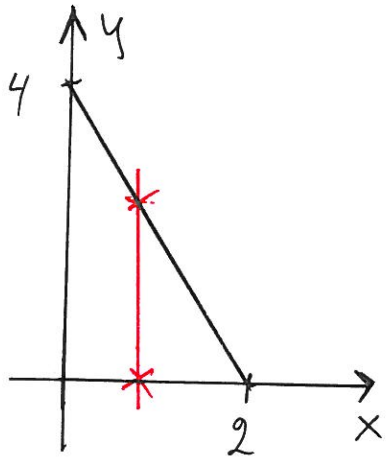
Projeksjonsplan: xy-planet. $\vec{P} = \vec{k}$

dA er flateelementet i xy-planet.

$$\nabla \times \vec{F} \cdot \vec{n}\, dS = -2x \cdot \frac{3}{2} dA = -3x\, dA$$

Projeksjon av planet i xy-planet:

$$z = 0 \Rightarrow 2x + y = 4 \Rightarrow y = 4 - 2x.$$



$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_S \nabla \times \vec{F} \cdot \vec{n}\, dS = -3 \iint x\, dA$$

$$= -3 \int_0^2 \int_0^{4-2x} x\, dy\, dx = -3 \int \left[x y \right]_0^{4-2x} dx$$

$$= -3 \int_0^2 x(4-2x)\, dx = -3 \int (4x - 2x^2)\, dx$$

$$= -3 \left[2x^2 - \tfrac{2}{3} x^3 \right]_0^2 = -3 \left[2 \cdot 2^2 - \tfrac{2}{3} \cdot 2^3 \right]$$

$$= -24 + 16 = \underline{\underline{-8}}$$