DET TEKNISK-NATURVITENSKAPELIGE FAKULTET

EKSAMEN I: ÅMA290 Matematikk 3 - vektoranalyse

DATO: 19. februar 2013 kl. 0900 - 1200

TILLATTE HJELPEMIDLER:

Rottmann: Matematisk formelsamling

Kalkulatorer: HP 30S, Casio FX82, TI-30, Citizen SR-270X.

Universitetet i Stavanger

OPPGAVESETTET BESTÅR AV 3 OPPGAVER PÅ 2 SIDER + 1 SIDE MED FORMLER

OPPGAVE 1

Gitt kurven C: $\mathbf{r}(t) = (2t-3)\,\mathbf{i} + (t-1)\,\mathbf{j} + (2t+4)\,\mathbf{k}$; $\quad 0 \le t \le 1$.

a) Beregn kurveintegralet

$$\int_C (y^2 + x - z)\, ds.$$

b) Vis at vektorfeltet $\mathbf{F}(x,y,z) = (2x+yz)\mathbf{i} + (xz+2yz)\,\mathbf{j} + (xy+y^2)\,\mathbf{k}$ er konservativt.

c) Finn en potensialfunksjon (skalarfelt) til vektorfeltet $\mathbf{F}$.

d) Beregn kurveintegralet

$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}.$$

OPPGAVE 2

La S være den delen av paraboloiden $z = 16 - x^2 - y^2$ som ligger over xy -planet.

Beregn flateintegralet

$$\iint_S \frac{x^2+y^2}{\sqrt{4x^2+4y^2+1}}\, dS.$$

OPPGAVE 3

Gitt vektorfeltet $\mathbf{F}(x, y, z) = 6xz^3\,\mathbf{i} - 2yz^3\,\mathbf{j} + 2\,\mathbf{k}$.
La T være området avgrenset av øvre halvkuleflate $x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ (z \geq 0)$ og xy -planet.

a) Finn $div\,\mathbf{F}$.

b) Bruk divergensteoremet til å beregne flateintegralet (fluksen)

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS,$$

der S er randen (overflaten) til området T, og $\mathbf{n}$ er enhetsnormalvektor til S. $\mathbf{n}$ peker utover (fra T).

c) Finn fluksen av vektorfeltet $\mathbf{F}(x, y, z)$ gjennom sirkelskiva $x^2 + y^2 \leq 1$ i xy -planet, i retning ut fra området T.

Lykke til!

Formler:

Kurveintegral av en funksjon f langs en kurve C: $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$, $a \le t \le b$:

$$\int\limits_C f\,ds = \int_a^b f(\mathbf{r}(t))\left|\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right|dt.$$

Kurveintegral av et vektorfelt $\mathbf{F} = F_1\mathbf{i} + F_2\mathbf{j} + F_3\mathbf{k}$, langs en kurve C: $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$, $a \le t \le b$:

$$\int\limits_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{T}\,ds = \int\limits_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int\limits_C F_1dx + F_2dy + F_3dz = \int_a^b (F_1\frac{dx}{dt} + F_2\frac{dy}{dt} + F_3\frac{dz}{dt})\,dt.$$

Flateintegral av en funksjon f over en flate $S: g(x,y,z) = K$ (K er en konstant):

$$\iint\limits_S f\,dS = \iint\limits_R f\,\frac{|\nabla g|}{|\nabla g\cdot\mathbf{P}|}\,dA.$$

Stokes' teorem:

$$\oint\limits_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \iint\limits_S (\nabla\times\mathbf{F})\cdot\mathbf{n}\,dS = \iint\limits_R (\nabla\times\mathbf{F})\cdot\frac{\pm\nabla g}{|\nabla g\cdot\mathbf{P}|}\,dA.$$

Divergensteoremet (Gauss' teorem):

$$\iint\limits_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS = \iiint\limits_T \nabla\cdot\mathbf{F}\,dV.$$

$$div\,\mathbf{F} = \nabla\cdot\mathbf{F},\quad curl\,\mathbf{F} = \nabla\times\mathbf{F},\quad \nabla = \frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}$$

Sylinderkoordinater: $(r\cos\theta, r\sin\theta, z)$.
Kulekoordinater: $(\rho\sin\phi\cos\theta, \rho\sin\phi\sin\theta, \rho\cos\phi)$.

ÅMA 290 Matematikk 3 – vektoranalyse.

Eksamen 19. februar 2013.

Løsning

Oppgave 1.

C : $\vec{r}(t) = (2t-3)\vec{i} + (t-1)\vec{j} + (2t+4)\vec{k}$

$0 \le t \le 1$.

a) $x = 2t-3$, $y = t-1$, $z = 2t+4$.

$\frac{dx}{dt} = 2$, $\frac{dy}{dt} = 1$, $\frac{dz}{dt} = 2$.

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k} = 2\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}.$$

$$\left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right| = \sqrt{2^2+1+2^2} = \sqrt{9} = 3.$$

Beregn $\int (y^2 + x - z)\,ds$.

$ds = \left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right| dt = 3\,dt$.

$$\int_C (y^2+x-z)\,ds = \int [(t-1)^2 + (2t-3) - (2t+4)] \cdot 3\,dt$$

$$= 3\int (t^2 - 2t + 1 + 2t - 3 - 2t - 4)\,dt =$$

$$3\int_0^1 (t^2-2t-6)\,dt = 3\cdot\left[\tfrac{1}{3}t^3-t^2-6t\right]_0^1$$

$$= t^3-3t^2-18t\Big|_0^1 = 1-3-18 = \underline{\underline{-20}}$$

b) $\vec{F}(x,y,z) = (2x+yz)\vec{i} + (xz+2yz)\vec{j} + (xy+y^2)\vec{k}$

Vis at $\vec{F}$ er konservativt:

$$\nabla\times\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2x+yz & xz+2yz & xy+y^2 \end{vmatrix}$$

$$= \vec{i}\left[\frac{\partial}{\partial y}(xy+y^2) - \frac{\partial}{\partial z}(xz+2yz)\right]$$
$$- \vec{j}\left[\frac{\partial}{\partial x}(xy+y^2) - \frac{\partial}{\partial z}(2x+yz)\right]$$
$$+ \vec{k}\left[\frac{\partial}{\partial x}(xz+2yz) - \frac{\partial}{\partial y}(2x+yz)\right]$$
$$= \vec{i}\,[x+2y-x-2y] - \vec{j}\,[y-y] + \vec{k}\,[z-z]$$
$$= 0.$$

$\nabla\times\vec{F} = 0 \Rightarrow \vec{F}$ er konservativ.

c) Finn potensialfunksjon f

$(\vec{F} = \nabla f)$.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + yz \qquad \text{I}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = xz + 2yz \qquad \text{II}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = xy + y^2 \qquad \text{III}$$

I: $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + yz \Rightarrow f = \int (2x + yz)\,dx$

$= x^2 + xyz + C_1(y, z)$.

Deriver mhp y:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = xz + \frac{\partial C_1}{\partial y} \underset{\text{II}}{=} xz + 2yz \Rightarrow$$

$$\frac{\partial C_1}{\partial y} = 2yz \Rightarrow C_1 = \int 2yz\,dy$$

$= y^2 z + C_2(y) \Rightarrow$

$$f = x^2 + xyz + y^2 z + C_2(z).$$

Deriver mhp z:

$$\frac{\partial f}{\partial z} = xy + y^2 + C_2' \underset{\text{III}}{=} xy + y^2 \Rightarrow$$

$$C_2' = 0 \Rightarrow C_2 = \text{konstant.}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{f = x^2 + xyz + y^2 z}}$$

d) Beregn $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$

C: $x = 2t-3$, $y = t-1$, $z = 2t+4$.

$\vec{F}$ konservativ $\Rightarrow \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_A^B df$

$= f\Big|_A^B$ der A og B er koord. til hhv. start og sluttpunkt på C.

A: $t=0$: $x = -3$, $y = -1$, $z = 4$

B: $t=1$: $x = -1$, $y = 0$, $z = 6$.

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = x^2 + xyz + y^2 z \Big|_{(-3,-1,4)}^{(-1,0,6)} =$$

$$(-1)^2 + -1\cdot 0\cdot 6 + 0\cdot 2$$

$$-\left((-3)^2 + (-3)\cdot(-1)\cdot 4 + (-1)^2\cdot 4\right)$$

$$= 1 - (9+12+4) = 1 - 25 = \underline{\underline{-24}}$$

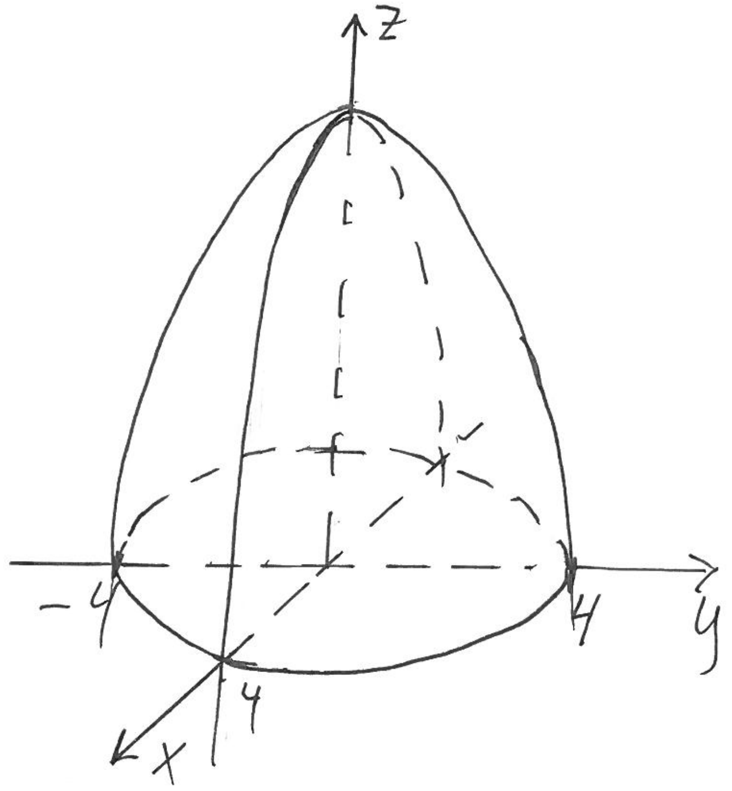
<u>Oppgave 2</u>

S: $z = 16 - x^2 - y^2$.

Skissere flaten: $x=0$: $z = 16 - y^2$ (parabel)

$y=0$: $z = 16 - x^2$ (parabel)

$z=0$: $x^2 + y^2 = 16$ (sirkel med $r=4$).



$$\iint_S \frac{x^2+y^2}{\sqrt{4x^2+4y^2+1}}\,dS$$

Definer $g(x,y,z) = x^2+y^2+z$.

Ser da nivåflaten $g=16$.

$$\nabla g = \frac{\partial g}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial g}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial g}{\partial z}\vec{k} = 2x\vec{i}+2y\vec{j}+\vec{k}.$$

$$|\nabla g| = \sqrt{(2x)^2+(2y)^2+1} = \sqrt{4x^2+4y^2+1}$$

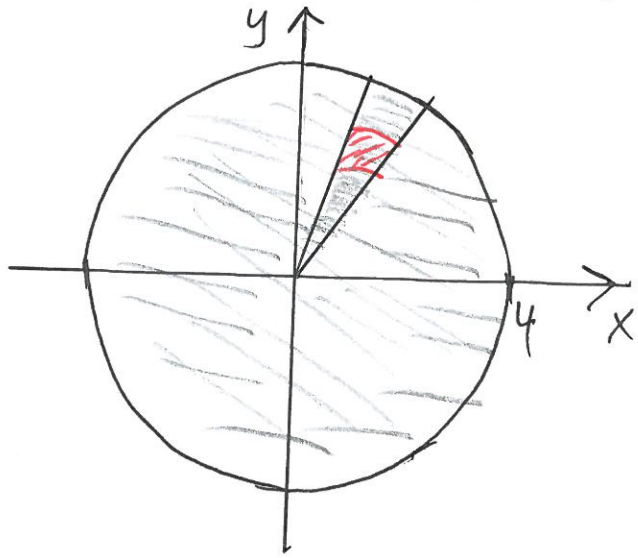
Projeksjonsplan: xy-planet $\Rightarrow \vec{P}=\vec{k}$

$$dS = \frac{|\nabla g|}{|\nabla g\cdot\vec{k}|}dA = \frac{\sqrt{4x^2+4y^2+1}}{1}\,dA$$

der dA er flateelementet i xy-planet.

Projeksjon: $z=0$: $x^2+y^2=16$,

Sirkel med radius $=4$.



$x^2+y^2 = r^2$ (sylinder/polar-koord.)

$$\iint_S \frac{x^2+y^2}{\sqrt{4x^2+4y^2+1}}\, dS$$

$$= \iint \frac{r^2}{\sqrt{4x^2+4y^2+1}} \cdot \sqrt{4x^2+4y^2+1}\; dA$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^4 r^2\, r\,dr\,d\theta = \iint r^3\, dr\,d\theta$$

$$= \int \frac{1}{4}r^4\Big|_0^4 d\theta = \frac{1}{4}\cdot 4^4 \int_0^{2\pi} d\theta = 4^3\cdot 2\pi$$

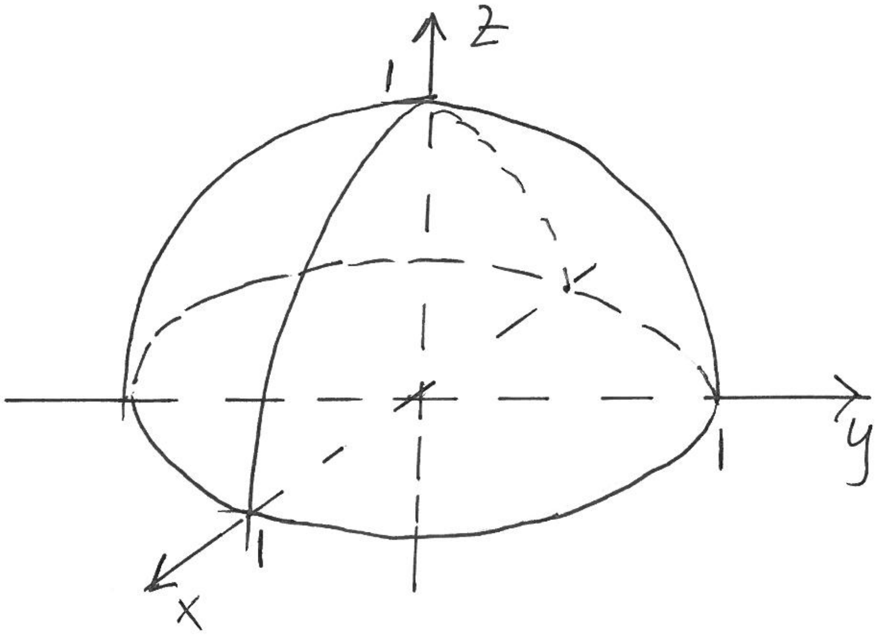
$$= 64\cdot 2\pi = \underline{\underline{128\pi}}$$

Oppgave 3

$\vec{F}(x,y,z) = 6xz^3\,\vec{i} - 2yz^3\,\vec{j} + 2\vec{k}$.

a) $\operatorname{div}\vec{F} = \nabla\cdot\vec{F} = \frac{\partial}{\partial x}6xz^3 - \frac{\partial}{\partial y}2yz^3 + \frac{\partial}{\partial z}2$

$$= 6z^3 - 2z^3 = \underline{\underline{4z^3}}.$$



Kula: $x^2+y^2+z^2=1$

$\Rightarrow z = \sqrt{1-(x^2+y^2}$ (övre halvkule)

$= \sqrt{1-r^2}$ i sylinderkoord.

Divergensteoremet:

$$\iint_S \vec{F}\cdot n\, dS = \iiint_T \nabla\cdot\vec{F}\, dV = \iiint_T 4z^3\, dV$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^1\int_0^{\sqrt{1-r^2}} 4z^3\, r\,dz\,dr\,d\theta$$

$$= 4\int\int \frac{1}{4}z^4\Big|_0^{\sqrt{1-r^2}} r\,dr\,d\theta = \iint\left(\sqrt{1-r^2}\right)^4 r\,dr\,d\theta$$

$$= \iint (1-r^2)^2 \, r \, dr \, d\theta = \iint u^2 r \left(-\frac{du}{2r}\right) d\theta$$

Subst.:	$= -\frac{1}{2} \iint u^2 \, du \, d\theta$
$u = 1 - r^2$	
$\frac{du}{dr} = -2r$	$= -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \int u^3 \, d\theta$
$dr = -\frac{du}{2r}$	$= -\frac{1}{6} \int_0^{2\pi} (1-r^2)^3 \Big|_0^1 \, d\theta$

$$= -\frac{1}{6} \int (0-1) \, d\theta = \frac{1}{6} \cdot 2\pi = \underline{\underline{\frac{\pi}{3}}}$$

c) Sirkelflata $x^2 + y^2 \le 1$.

$\vec{F} = 6xz^3 \vec{i} - 2yz^3 \vec{j} + 2\vec{k}$.

$\vec{n}$ peker i retning ut fra $T \Rightarrow \vec{n} = -\vec{k}$.

$\vec{F} \cdot \vec{n} = -2$.

Fluks $= \iint_S \vec{F} \cdot n \, dS = -2 \iint dS$

$= -2 \iint dA$ $= -2 \cdot$ areal av sirkelen

$= -2 \cdot \pi \cdot 1 = \underline{\underline{-2\pi}}$

$dS = dA$ er flateelement i xy-planet