DET TEKNISK-NATURVITENSKAPELIGE FAKULTET

EKSAMEN I: MAT300 Vektoranalyse

DATO: 12. desember 2013 kl. 0900 - 1300

TILLATTE HJELPEMIDLER:
Rottmann: Matematisk formelsamling
Kalkulatorer: HP 30S, Casio FX82, TI-30, Citizen SR-270X.

Universitetet i Stavanger

OPPGAVESETTET BESTÅR AV 4 OPPGAVER PÅ 2 SIDER + 1 SIDE MED FORMLER

OPPGAVE 1

Gitt kurven C: $\mathbf{r}(t) = 3t\,\mathbf{i} - 4\sin t\,\mathbf{j} + 4\cos t\,\mathbf{k}$; $\quad 0 \le t \le \pi$.

a) Beregn kurveintegralet
$$\int_C (x^2 + y)\, ds.$$

b) Vis at vektorfeltet $\mathbf{F}(x, y, z) = z\mathbf{i} + (z + 6y^2)\,\mathbf{j} + (x + y)\,\mathbf{k}$ er konservativt.

c) Finn en potensialfunksjon (skalarfelt) til vektorfeltet $\mathbf{F}$.

d) Beregn kurveintegralet
$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}.$$

OPPGAVE 2

Gitt transformasjonen $x = u + 2v$; $\quad y = u$, som gir sammenheng mellom (u, v) -koordinatene og (x, y) -koordinatene.
Gitt området R i xy -planet i 1. kvadrant avgrenset av de rette linjene $y = x$, $y = x-4$, $y = 0$, og $y = 3$.

a) Skisser området R i xy -planet. Skisser avbildningen av R i uv -planet. Finn Jacobi-determinantene
$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \quad \text{og} \quad \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}$$

b) Beregn dobbelintegralet
$$\iint_R y(x - y)\, dA$$
der R er området i xy -planet gitt ovenfor, ved å benytte skifte av variable gitt ovenfor.

OPPGAVE 3

Gitt vektorfeltet $\mathbf{F}(x, y, z) = xy^2\mathbf{i} + (3y - 2x)\,\mathbf{j} - yz\,\mathbf{k}$.

a) Finn $div\,\mathbf{F}$ og $curl\,\mathbf{F}$.

b) La C være skjæringskurven mellom kuleflaten $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ og xy -planet. C er orientert mot urviser, sett ovenfra. Beregn kurveintegralet

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}.$$

OPPGAVE 4

La S være den delen av paraboloiden $z = 4 - x^2 - y^2$, som ligger over xy -planet $(z \geq 0)$. La T være området avgrenset av flaten S og xy -planet.

a) Beregn

$$\iiint_T z^2\, dV.$$

b) Gitt vektorfeltet $\mathbf{F}(x, y, z) = -4yz\mathbf{i} + 4xz\,\mathbf{j}$.
Finn fluksen

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}}\, dS$$

av vektorfeltet $\mathbf{F}$ i retning ut fra området T. $\hat{\mathbf{N}}$ er enhetsnormalvektor til S.

Lykke til!

Formler:

Kurveintegral av en funksjon f langs en kurve C: $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$, $\quad a \le t \le b$:

$$\int_C f\,ds = \int_a^b f(\mathbf{r}(t))|\frac{d\mathbf{r}}{dt}|\,dt.$$

Kurveintegral av et vektorfelt $\mathbf{F} = F_1\mathbf{i} + F_2\mathbf{j} + F_3\mathbf{k}$, langs en kurve C: $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$, $a \le t \le b$:

$$\int_C \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{T}}\,ds = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz = \int_a^b (F_1\frac{dx}{dt} + F_2\frac{dy}{dt} + F_3\frac{dz}{dt})\,dt.$$

Flateintegral av en funksjon f over en flate $S : g(x, y, z) = K$ (K er en konstant):

$$\iint_S f\,dS = \iint_R f\,\frac{|\nabla g|}{|\nabla g \cdot \mathbf{P}|}\,dA.$$

Stokes' teorem:

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \hat{\mathbf{N}}\,dS = \iint_R (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \frac{\pm\nabla g}{|\nabla g \cdot \mathbf{P}|}\,dA.$$

Divergensteoremet:

$$\iiint_D \nabla \cdot \mathbf{F}\,dV = \iint_S \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}}\,dS.$$

$$div\,\mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{F}, \quad curl\,\mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F}, \quad \nabla = \frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}$$

Sylinderkoordinater: $(r\cos\theta, r\sin\theta, z)$.
Kulekoordinater: $(\rho\sin\phi\cos\theta, \rho\sin\phi\sin\theta, \rho\cos\phi)$.

MAT 300 vektoranalyse.

Eksamen 12. desember 2013

Lösning

Oppgave 1.

$C: \vec{r}(t) = 3t\,\vec{i} - 4\sin t\,\vec{j} + 4\cos t\,\vec{k}$

$0 \leq t \leq \pi$

På komponentform:

$x = 3t, \quad y = -4\sin t, \quad z = 4\cos t.$

a) Beregn $\int_C (x^2+y)\,ds$.

$\frac{dx}{dt} = 3, \quad \frac{dy}{dt} = -4\cos t, \quad \frac{dz}{dt} = -4\sin t.$

$$\left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right| = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}$$

$$= \sqrt{3^2 + 16\cos^2 t + 16\sin^2 t}$$

$$= \sqrt{9 + 16(\cos^2 t + \sin^2 t)} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$$

$$ds = \left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right| dt = 5\,dt.$$

$$\int_C (x^2+y)\,ds = 5\int_0^{\pi}\left((3t)^2 - 4\sin t\right)dt =$$

$$= 5\int_0^{\pi}(9t^2 - 4\sin t)\,dt = 5\left[\frac{9}{3}t^3 + 4\cos t\right]_0^{\pi}$$

$$= 5\left[3\pi^3 + 4\cos\pi - 4\cos 0\right] = 5\left[3\pi^3 + 4(-1-1)\right]$$

$$= \underline{\underline{15\pi^3 - 40}}$$

b) $\vec{F}(x,y,z) = z\vec{i} + (z+6y^2)\vec{j} + (x+y)\vec{k}$.

Vis at $\vec{F}$ er konservativ:

$$\nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ z & z+6y^2 & x+y \end{vmatrix}$$

$$= \vec{i}\left[\frac{\partial}{\partial y}(x+y) - \frac{\partial}{\partial z}(z+6y^2)\right]$$

$$- \vec{j}\left[\frac{\partial}{\partial x}(x+y) - \frac{\partial}{\partial z} z\right] + \vec{k}\left[\frac{\partial}{\partial x}(z+6y^2) - \frac{\partial}{\partial z} z\right]$$

$$= \vec{i}\,[1-1] - \vec{j}\,[1-1] + k \cdot 0 \qquad = \vec{0}.$$

$\nabla \times \vec{F} = \vec{0} \Rightarrow$ <u>$\vec{F}$ er konservativ.</u>

c) Finn en potensialfunksjon φ

$(\vec{F} = \nabla\varphi)$.

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = z \qquad \mathrm{I}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y} = z + 6y^2 \qquad \mathrm{II}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z} = x + y \qquad \mathrm{III}$$

I $\frac{\partial\varphi}{\partial x} = z \Rightarrow \varphi = \int z\,dx = xz + C_1(y,z)$.

Deriver mhp y:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y} = \frac{\partial C_1}{\partial y} \underset{\mathrm{II}}{=} z + 6y^2 \Rightarrow C_1 = \int (z + 6y^2)\,dy$$

$$= yz + 2y^3 + C_2(z).$$

$\Rightarrow \varphi = xz + yz + 2y^3 + C_2(z)$.

Deriver mhp z:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z} = x + y + C_2' \underset{\mathrm{III}}{=} x + y \Rightarrow C_2' = 0 \Rightarrow$$

$C_2 = \text{konst.}$

$\Rightarrow \underline{\underline{\varphi = xz + yz + 2y^3}} \quad (+C)$

d) Beregn $\int_C \vec{F} \circ d\vec{r}$.

$C: \; x = 3t, \; y = -4\sin t, \; z = 4\cos t$

$0 \le t \le \pi$.

$t = 0: \; x = 0, \; y = 0, \; z = 4. \quad \vec{r}(0) = (0, 0, 4)$

$t = \pi: \; x = 3\pi, \; y = 0, \; z = -4.$

$\vec{r}(\pi) = (3\pi, 0, -4).$

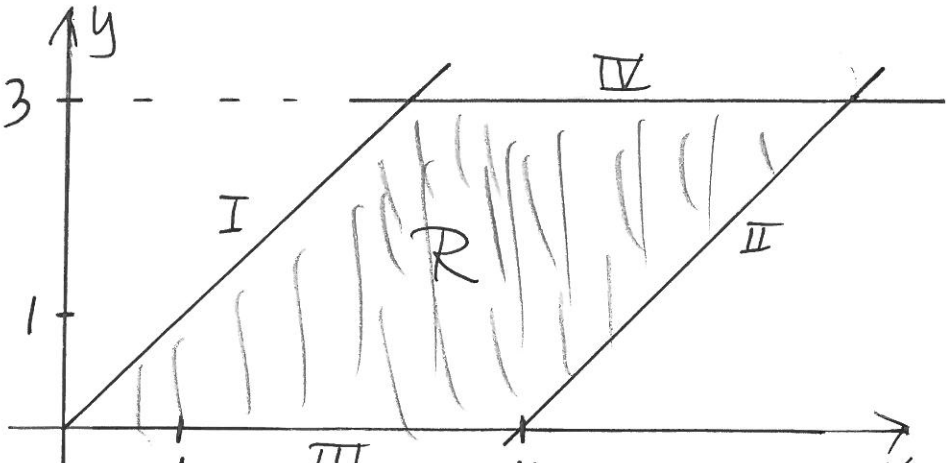
$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \varphi \Big|_{\vec{r}(0)}^{\vec{r}(\pi)} = xz + yz + 2y^3 \Big|_{(0,0,4)}^{(3\pi, 0-4)}$$

$$= 3\pi \cdot (-4) + 0 + 0 - (0 + 0 + 0) = \underline{\underline{-12\pi}}$$

<u>Oppgave 2</u>

$R: \; y = x, \; y = x - 4, \; y = 0, \; y = 3.$

a)



Transformasjon: $x = u + 2v$, $y = u$.

Avbildning (transformasjon) av R:

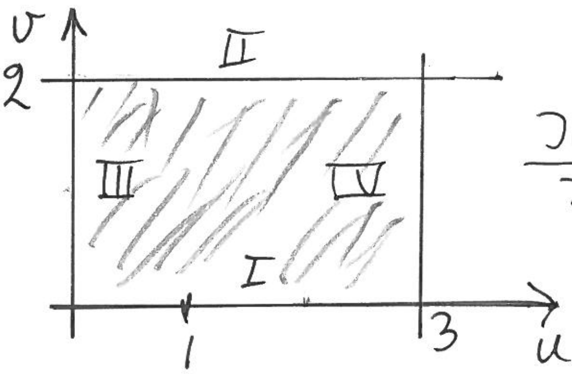
I: $y = x$:

$u = u + 2v \Rightarrow \underline{v = 0}$

II: $y = x - 4$: $u = u + 2v - 4 \Rightarrow 2v = 4$

$\Rightarrow \underline{v = 2}$

III $y = 0$: $\underline{u = 0}$. IV $y = 3$: $\underline{u = 3}$



$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = \underline{\underline{-2.}}$$

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \frac{1}{\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}} = \frac{1}{-2} = \underline{\underline{-\frac{1}{2}}}$$

Alternativt: Uttrykk transformasjonen som funksjon av x og y, og beregn determinanten $\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}$.

b) Beregn $\iint\limits_R y(x-y)\,dA$.

Kall avbildningen S.

$$\iint\limits_R y(x-y)\,dA = \iint\limits_S u(u+2v-u)\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| dv\,du$$

$$= \int_0^3 \int_0^2 u \cdot 2v \cdot 2\,dv\,du = 4\int_0^3 \int_0^2 uv\,dv\,du$$

$$= 4 \cdot \int_0^3 u \cdot \frac{1}{2}v^2 \Big|_0^2 du = 2\int u \cdot 2^2\,du$$

$$= 8 \cdot \frac{1}{2}u^2 \Big|_0^3 = 4 \cdot 3^2 = 4 \cdot 9 = \underline{\underline{36}}.$$

Oppgave 3

$$\vec{F}(x,y,z) = xy^2\,\vec{i} + (3y-2x)\,\vec{j} - yz\,\vec{k}$$

a) $$\operatorname{div}\vec{F} = \nabla\cdot\vec{F} = \frac{\partial}{\partial x}(xy^2) + \frac{\partial}{\partial y}(3y-2x) + \frac{\partial}{\partial z}(-yz)$$

$$= \underline{\underline{y^2 + 3 - y}} \quad (= y^2 - y + 3)$$

$$\operatorname{curl}\vec{F} = \nabla\times\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xy^2 & 3y-2x & -yz \end{vmatrix}$$

$$= \vec{i}\left[\frac{\partial}{\partial y}(-yz) - \frac{\partial}{\partial z}(3y-2x)\right] - \vec{j}\left[\frac{\partial}{\partial x}(-yz) - \frac{\partial}{\partial z}xy^2\right] + \vec{k}\left[\frac{\partial}{\partial x}(3y-2x) - \frac{\partial}{\partial y}xy^2\right]$$

$$= -z\vec{i} - j\cdot 0 + \vec{k}(-2 - 2xy)$$

$$= \underline{\underline{-z\vec{i} - 2(1+xy)\vec{k}.}}$$

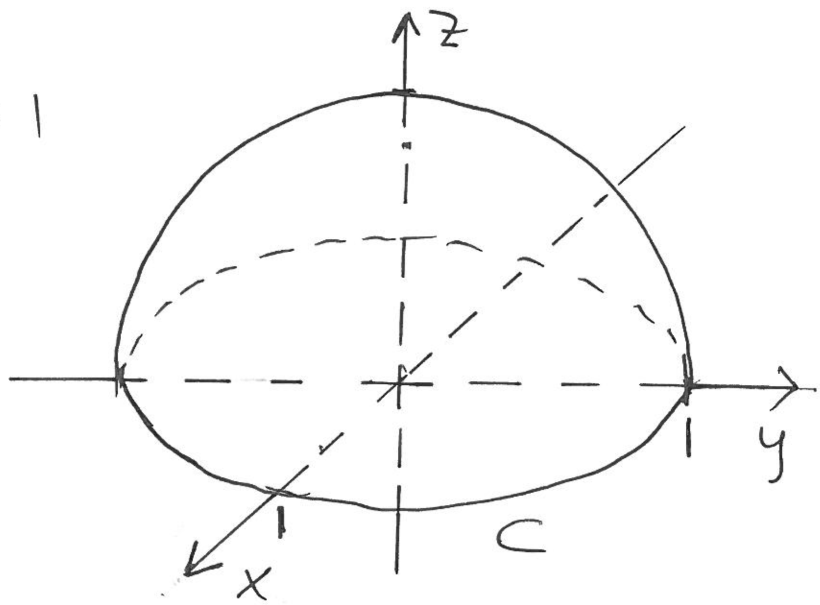
b) $x^2+y^2+z^2=1$

Skjæring med xy-planet:

$z=0$:

$x^2+y^2=1$.

Sirkel med radius $=1$.



Beregn $\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$. Bruk Stokes teorem:

$$\oint \vec{F}\cdot d\vec{r} = \iint_S \nabla\times\vec{F}\cdot\hat{N}\,dS$$

La S være sirkelskiva i xy-planet:

$$x^2+y^2\leq 1, \quad z=0.$$

C er randkurve til sirkelskiva.

$\hat{N}$ er enhetsnormalvektor til S.

$\hat{N}=\hat{k}$. $dS=dA=$ flateelementet i xy-planet.

$$\iint_S \nabla\times\vec{F}\cdot\hat{N}\,dS = \iint\left(-z\vec{i}-2(1+xy)\vec{k}\right)\cdot\vec{k}\,dA$$

$$=\iint -2(1+xy)\,dA = -2\iint dA - 2\iint xy\,dA =$$

$$\iint xy\,dA = \int_0^{2\pi}\int_0^1 r\cos\theta\, r\sin\theta\; r\,dr\,d\theta$$

(polarkoord.)

$$= \iint r^3 \cos\theta \sin\theta \; dr\,d\theta$$

$$= \frac{1}{4}\int r^4\Big|_0^1 \cos\theta \sin\theta \; d\theta = \frac{1}{4}\int \cos\theta \sin\theta\, d\theta$$

Subst.:

$u = \sin\theta$

$\frac{du}{d\theta} = \cos\theta$

$d\theta = \frac{du}{\cos\theta}$.

$$= \frac{1}{4}\int u \cos\theta \,\frac{du}{\cos\theta} = \frac{1}{4}\int u\,du$$

$$= \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}u^2 = \frac{1}{8}\sin^2\theta\Big|_0^{2\pi}$$

$$= \frac{1}{8}\left[\sin^2 2\pi - \sin^2(0)\right] = \underline{0.}^{*}$$

$$-2\iint_S dA = -2\cdot \text{areal av sirkelen} = \underline{-2\pi}$$

Altså $\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \underline{\underline{-2\pi}}$

* Alternativ: Symmetribetraktning:

$\iint xy\,dx\,dy$ er integrasjon av odde-funksjon over symmetrisk område $\Rightarrow \iint = 0$.

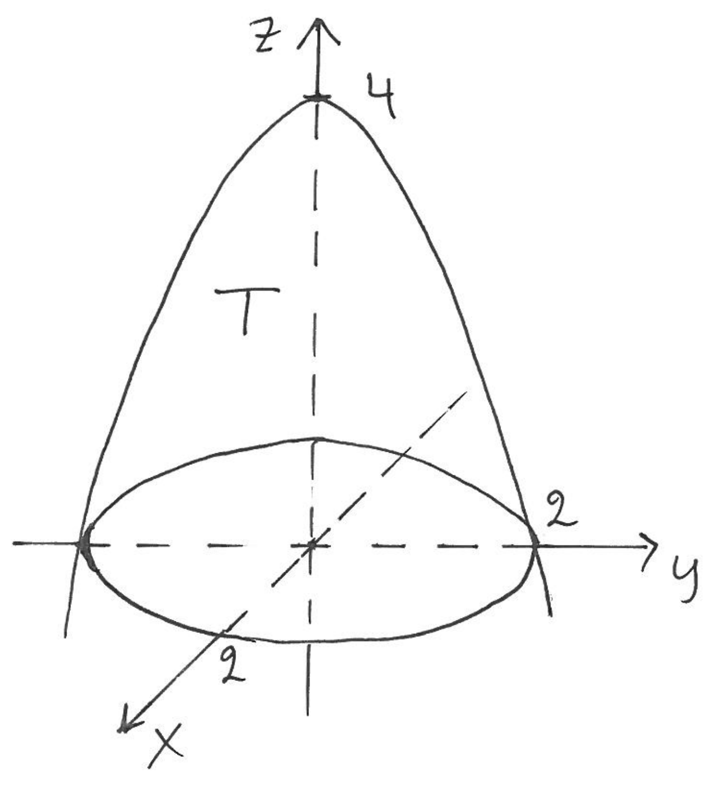
Oppgave 4.

$S: \ z = 4 - x^2 - y^2$. Skisser S:

$x = 0$: $z = 4 - y^2$ parabel

$y = 0$: $z = 4 - x^2$ — " —

$z = 0$: $x^2 + y^2 = 4$. Sirkel med radius $= 2$.



a) Beregn $\iiint_T z^2 \, dV$. Bruk sylinderkoord.

$z = 4 - x^2 - y^2 = 4 - r^2$. $\quad z = 0 \Rightarrow$

$x^2 + y^2 = 4$.

Sirkel med radius $= 2$.

$$\iiint_T z^2\,dV = \iiint_T z^2\,dz\,r\,dr\,d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^2\int_0^{4-r^2} z^2\,dz\,r\,dr\,d\theta = \frac{1}{3}\iint z^3\Big|_0^{4-r^2} r\,dr\,d\theta$$

$$= \frac{1}{3}\iint (4-r^2)^3\,r\,dr\,d\theta = \frac{1}{3}\iint u^3\left(-\frac{du}{2r}\right)d\theta$$

Subst.:

$u = 4-r^2$

$\frac{du}{dr} = -2r$

$dr = -\frac{du}{2r}$

$$= -\frac{1}{6}\iint u^3\,du\,d\theta = -\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{4}\int u^4\,d\theta$$

$$= -\frac{1}{24}\int (4-r^2)^4\Big|_0^2 d\theta = -\frac{1}{24}\int(0-4^4)\,d\theta$$

$$= \frac{1}{24}\int_0^{2\pi} 4^4\,d\theta = \frac{4^3}{6}\int_0^{2\pi} d\theta = \frac{4^3}{6}\cdot 2\pi$$

$$= \frac{4^3\pi}{3} = \underline{\underline{\frac{64\pi}{3}}}$$

b) $\vec{F} = -4yz\vec{i} + 4xz\vec{j}$.

Finn fluks av $\vec{F}$ gjennom S.

S: $z = 4 - x^2 - y^2 \Rightarrow x^2 + y^2 + z = 4$.

Definer $g(x,y,z) = x^2 + y^2 + z$.

$\nabla g = 2x\vec{i} + 2y\vec{j} + \vec{k}$. $\vec{F}\cdot\nabla g = [-4yz, 4xz, 0]\cdot[2x, 2y, 1]$

$= -8xyz + 8xyz = 0 \Rightarrow$

$\vec{F}\cdot\hat{N} = \vec{F}\cdot\frac{\nabla g}{|\nabla g|} = 0 \Rightarrow \underline{\underline{\text{Fluks} = 0.}}$

Alternativ:

Fluks gjennom S + sirkelskiva i xy-planet. Dette avgrenser et lukket område. Bruk divergensteoremet.

$\nabla \cdot \vec{F} = \frac{\partial}{\partial x}(-4yz) + \frac{\partial}{\partial y}(4xz) + \frac{\partial}{\partial z} 0 = 0.$

$\Rightarrow$ Totalfluks $\iint \vec{F} \cdot \hat{N} dS = \iiint_T \nabla \cdot F dV = 0$

Fluks gjennom xy-planet: $z = 0$
$\Rightarrow \vec{F} = 0$

$\Rightarrow$ fluks gjennom sirkelskiva $= 0$

$\Rightarrow$ fluks gjennom S = Totalfluks − fluks gjennom sirkelskiva $= \underline{0}$