# Universitetet i Stavanger

## Det Teknisk-Naturvitenskapelige Fakultet

**Eksamen i:** MAT100 Matematiske metoder 1
**Dato:** 6. desember, 2017
**Tid:** 9:00-14:00 (5 timer)
**Språk:** Norsk, Bokmål
**Tillatte hjelpemidler:**
K. Rottmann, *Matematisk formelsamling*.
Enkel bestemt kalkulator.
**Faglærer:** Sigbjørn Hervik, tlf: 41581800

Oppgavesettet består av 6 oppgaver på 3 sider.
Deloppgaver a), b) etc,. vektes likt.

$\infty \quad \infty \quad \infty \quad \infty$

# Oppgave 1

a) Gitt $z = 2 - 3i$ og $w = 1 + i$. Regn ut $zw$, $|z|^2$ og $1/w^2$.

b) Regn ut $(1 + i)^{10}$ og skriv svaret på kartesisk form.

c) Finn alle løsningene til ligningen $z^3 + i = 0$ og skriv svarene på kartesisk form.

## Oppgave 2

Finn følgende integraler. Utregning må vises!

a) $\displaystyle\int \left(2x^{1/3} - e^{3x}\right) dx.$ b) $\displaystyle\int x\cos x dx.$ c) $\displaystyle\int \cos x\sqrt{3 - \sin x} dx.$

d) $\displaystyle\int \frac{3x+2}{(x-1)(x^2+1)} dx.$ e) $\displaystyle\int \cos^3 x dx.$

## Oppgave 3

a) Regn ut grenseverdiene dersom de eksisterer:

$$1)\ \lim_{x\to\infty} \frac{x\ln x}{x^2+1}, \qquad 2)\ \lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2+4x+5} - x\right)$$

b) Løs differensialligningen:

$$y'' - 3y' - 10y = \cos x.$$

c) Finn $\frac{dy}{dx}$ dersom $y$ er definert ved:

$$y\sin x = x\cos y.$$

## Oppgave 4

Gitt funksjonen

$$f(x) = \frac{3+x}{\sqrt{9+x^2}}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

a) Finn alle ekstremalpunktene for $f$. Avgjør om de er lokale maksimum eller minimum.

b) La $D$ være området avgrenset av grafen til $f$, $x$-aksen, $x = 0$ og $x = 2$. Finn volumet av omdreiningslegmet som fremkommer ved å dreie $D$ om $x$-aksen.

# Oppgave 5

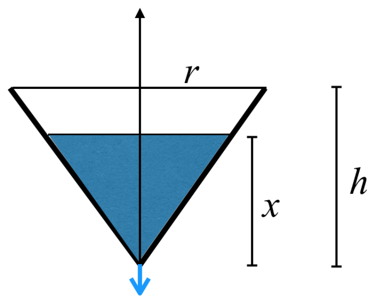
Her skal vi se på differensialligningen:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}.$$

Finn alle løsningene til denne differensialligningen. La $c$ være en kurve som er normalt (vinkelrett) på alle disse løsningene. Vis at $c$ er en sirkel (eller en del av en sirkel).

# Oppgave 6

Kalle har et kjegleforma kar (sirkulært, med spissen ned) som han har fylt helt opp med vann, se figur. Her er dybden $h = 10$ dm og radien $r = 8$ dm. I bunnen av karet er det ei kran. Når krana åpnes vil karet tømmes med en rate som er proposjonalt med dybden av vannet. Det vil si at volumet av vannet oppfyller:




$$\frac{dV}{dt} = -kx,$$

hvor $V$ er volumet til vannet (i liter), $t$ er tiden (i minutter), $x$ er dybden av vannet (i dm), og $k$ er en konstant.

Kalle åpner krana slik at stømningsraten ut av krana er 8 liter vann per minutt (ved $t = 0$).

a) Vis at dybden av vannet, $x(t)$, oppfyller initialverdiproblemet:

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{5}{4\pi x}, \qquad x(0) = 10.$$

b) Løs initialverdiproblemet fra a). Når er karet tomt?

♡ God Jul! ♡