

Universitetet i Stavanger

Det Teknisk-Naturvitenskapelige Fakultet

Eksamen i: MAT100 Matematiske metoder 1

Dato: 3. desember, 2020

Tid: 9:00-14:00 (5 timer)

Språk: Norsk, Bokmål

Tillatte hjelpemidler: Alle hjelpemidler.

Faglærer: Sigbjørn Hervik, tlf: 41581800

Oppgavesettet består av 6 oppgaver på 3 sider.

Deloppgaver a), b) etc., vektes likt.

∞ ∞ ∞ ∞

Oppgave 1

- Gitt $z = 1 + 4i$ og $w = -3 + 4i$. Regn ut zw , w/z og $\bar{z}\bar{w}$.
- Finn alle 4. røttene til -64 . Skriv de på kartesisk form og tegn de inn i det komplekse planet.
- La $z = 1 - \sqrt{3}i$. Skriv z på eksponentiell form. For hvilke positive heltall n er z^n et reelt tall?

Oppgave 2

Finn følgende integraler. Her må integrasjonsmetode og utregning vises!

a) $\int (3x^{-1/2} + e^{2\pi x}) dx$. b) $\int \frac{\sqrt{\tan^{-1} x}}{1+x^2} dx$. c) $\int \frac{5x+9}{x(x+3)^2} dx$.

Oppgave 3

Vi definerer følgende funksjon:

$$f(x) = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1+x^2}}, \quad x \geq 0.$$

- Finn alle ekstremalpunktene til f . Bestem også de globale ekstremalverdiene, dersom de finnes.
- Et område D er avgrensa av grafen til $f(x)$, linja $x = 2$ og x -aksen. Finn volumet av omdreiningslegmet som fremkommer med å dreie D om x -aksen.

Oppgave 4

I alle disse oppgavene må du vise utregning og hvilke metoder som brukes.

- Finn løsningen på initialverdiproblemet:

$$\begin{cases} y' - \frac{2}{x}y = x^2 \ln x \\ y(1) = 2 \end{cases}$$

- Finn den generelle løsningen på den inhomogene differensialligningen:

$$y'' + 3y' - 10y = 6e^{2x}.$$

- Bestem verdien(e) av konstanten b som oppfyller:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(bx)}{x^2} = 2020.$$

- Bruk en invers trigonometrisk substitusjon til å regne ut:

$$\int \frac{1}{(9-x^2)^{3/2}} dx$$

Oppgave 5

La c være kurven bestemt implisitt ved

$$2x^3 + x^2y + 2y^3 = 10.$$

- Vis at punktet $P(2, -1)$ ligger på kurven c . Hvor skjærer kurven x - og y -aksene?
- Finn et uttrykk for den deriverte $y'(x)$ ved å bruke implisitt derivasjon.
- Finn ligningene for normalen og tangenten til kurven c gjennom $P(2, -1)$.

Oppgave 6

I Nissebygda er det to alver som har blitt smittet med et fullstendig harmløst (heldigvis) virus. Dette viruset er veldig smittosomt og sprer seg gjennom alvebefolkningen. Vi skal bruke en enkel modell for spredningen av dette viruset.

Antallet smittede, N , som funksjon av tiden t (i dager), av alvene i Nissebygda skal vi beskrive med differensialligningen.

$$N'(t) = kN(A - N),$$

hvor k er en konstant.

Vi skal anta befolkningen av alver er 700, det vil si at $A = 700$ i denne modellen. Dessuten skal vi anta at $N'(0) = 1$.

- Hva er løsningen til denne ligningen når vi har at $N(0) = 2$?
- Hvor lang tid vil det ta før halvparten (50%) av alvene er smittet av dette viruset? Hva skjer når $t \rightarrow \infty$?

♥ God Jul! ♥