Eksamen 19. des 2002 ①

Regtek 1, løsningsforslag

a) Kraftbalansen kan skrives

$$m \cdot \ddot{x}_m = \sum F = -F_k - F_D + mg$$

Fjærkraften virker mot massen, $F_k = K_f \cdot x_m$, hvis hjulet står ~~[illegible]~~ i nullposisjon, $x_h = 0$. Hvis hjulet beveger seg i sin positive retning (nedover), blir fjærkraften mindre.
Ergo kan vi skrive

$$F_k = K_f \cdot (x_m - x_h)$$

Tilsvarende for dempekraften:

$$F_D = D(\dot{x}_m - \dot{x}_h)$$

setter inn og får

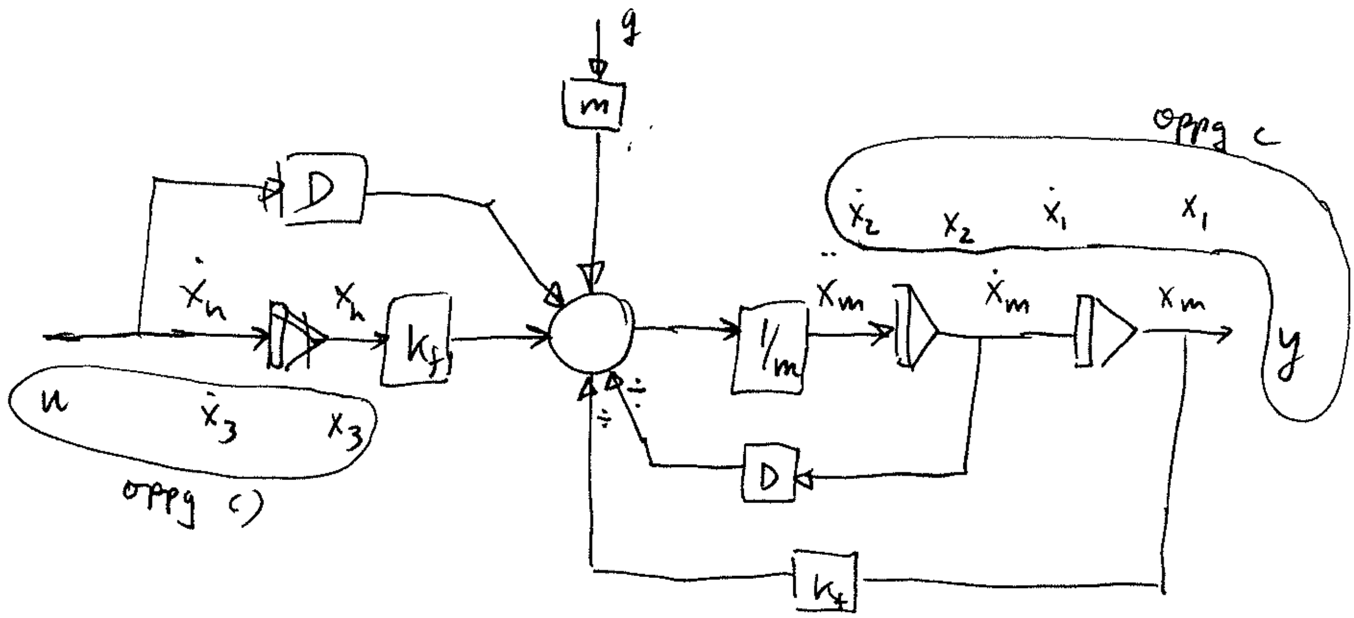
$$m \cdot \ddot{x}_m = -K_f(x_m - x_h) - D(\dot{x}_m - \dot{x}_h) + mg$$

$$m \cdot \ddot{x}_m = K_f \cdot (x_h - x_m) + D(\dot{x}_h - \dot{x}_m) + mg$$

b) skriver ligningen som:

$$\ddot{x}_m = \frac{1}{m}\left(K_f x_h - K_f x_m + D \cdot \dot{x}_h - D\dot{x}_m + mg\right)$$

tegne blokkskjema:



c) Har på blokkskjemaet innført de nye tilstandene, og leser ut modellen

$$\dot{x}_1 = x_2$$
$$\dot{x}_2 = \frac{1}{m}\left(-K_f \cdot x_1 - D \cdot x_2 + K_f \cdot x_3 + D \cdot u + mg\right)$$
$$\dot{x}_3 = u$$
$$y = x_1$$

rydder litt:

$$\dot{x}_1 = x_2$$
$$\dot{x}_2 = -\frac{K_f}{m} x_1 - \frac{D}{m} x_2 + \frac{K_f}{m} x_3 + \frac{D}{m} \cdot u + g$$
$$\dot{x}_3 = u$$
$$y = x_1$$

setter opp på tilstandsromform:

A $\quad$ B $\quad$ C $\quad$ ④

$$\begin{bmatrix} \dot{X}_1 \\ \dot{X}_2 \\ \dot{X}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{K_f}{m} & -\frac{D}{m} & \frac{K_f}{m} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{D}{m} \\ 1 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} g$$

$$y = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{D} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix}$$

modellen er av tredje orden

d) Laplacetransformerer ligningene på tilstandsromform:

(i) $\quad s \cdot X_1(s) = X_2(s)$

(ii) $\quad s \cdot X_2(s) = -\frac{K_f}{m} X_1(s) - \frac{D}{m} X_2(s) + \frac{K_f}{m} X_3(s) + \frac{D}{m} u(s) + g(s)$

(iii) $\quad s \cdot X_3(s) = u(s)$

(iv) $\quad y(s) = X_1(s)$

skal altså eliminere $X_2(s)$ og $X_3(s)$, samt sette $g(s) = 0$.

setter (i) inn i (ii), og (iii) inn i (ii)

$$s\cdot\left(s\cdot X_1(s)\right) = -\frac{K_f}{m}\cdot X_1(s)$$

$$-\frac{D}{m}\cdot s\cdot X_1(s)$$

$$+\frac{K_f}{m}\cdot\frac{u(s)}{s}+\frac{D}{m}u(s)$$

$$\Downarrow$$

$$s^2\cdot X_1(s)+\frac{K_f}{m}\cdot X_1(s)+\frac{D}{m}\cdot s\cdot X_1(s)$$

$$=\left(\frac{K_f}{m\cdot s}+\frac{D}{m}\right)u(s)$$

$$\Downarrow$$

setter $y(s) = X_1(s)$

$$\left(s^2+\frac{D}{m}s+\frac{K_f}{m}\right)y(s)=\left(\frac{K_f}{m s}+\frac{D}{m}\right)u(s)$$

multipliserer med $m\cdot s$

$$\left(ms^3 + Ds^2 + K_f \cdot s\right) y(s) = \left(+K_f + D \cdot s\right) u(s)$$

transferfunksjonen blir:

$$\frac{y(s)}{u(s)} = \frac{Ds + K_f}{ms^3 + Ds^2 + K_f s}$$

Dette systemet kan spaltes opp i et annen ordens system + en integrator + et nullpkt i venstre halvplan.

e) Har $\frac{y(s)}{x_3(s)} = \frac{K_f}{ms^2 + Ds + K_f}$

Skal sammenlignes med

$$h(s) = \frac{K}{\left(\frac{1}{w_0^2}\right)s^2 + \frac{2\xi}{w_0}s + 1}$$

~~Dette gir~~ skriver om systemet vårt:

$$\frac{y(s)}{x_3(s)} = \frac{1}{\frac{m}{K_f} \cdot s^2 + \frac{D}{K_f}s + 1}$$

ser at $\frac{1}{w_0^2} = \frac{m}{K_f}$

$$\Downarrow$$

$$w_0^2 = \frac{K_f}{m}$$

$$\Downarrow$$

$$\underline{\underline{w_0 = \sqrt{\frac{K_f}{m}}}}$$

og at

$$\frac{2\xi}{w_0} = \frac{D}{K_f} \Rightarrow \xi = \frac{D}{K_f} \cdot \frac{w_0}{2}$$

%

Som gir

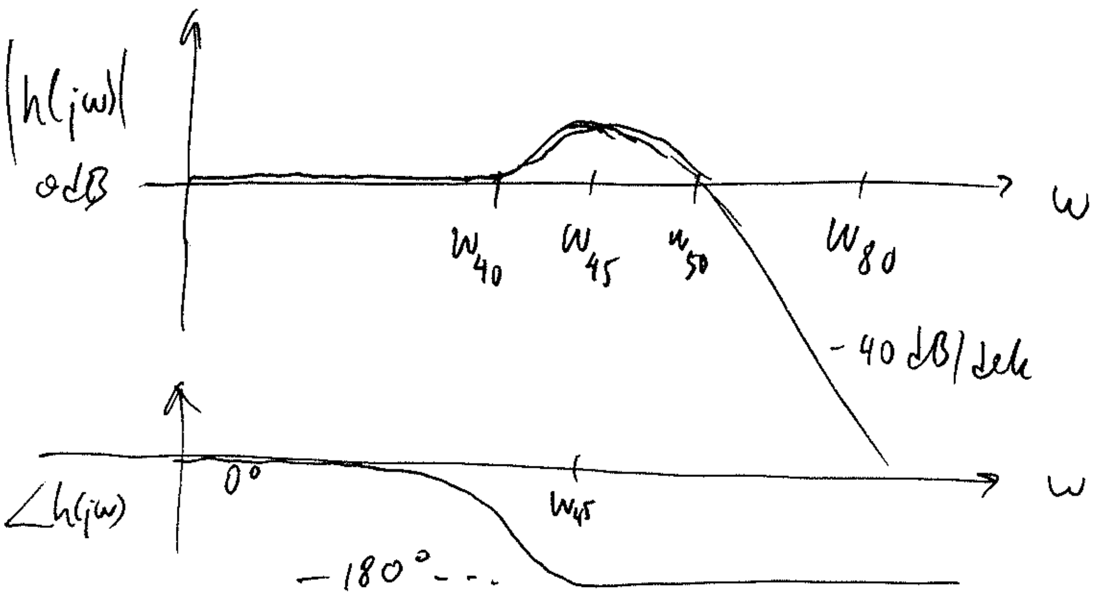
$$\xi = \frac{D}{\sqrt{K_f}\cdot\cancel{\sqrt{K_f}}}\cdot\frac{\cancel{\sqrt{K_f}}}{\sqrt{m}}\cdot\frac{1}{2}$$

$$= \frac{D}{\sqrt{K_f\cdot m}\cdot 2}$$

f) Bilen følger underlaget til ω_{40}, altså er $|h(j\omega)| \approx 1 = 0$ dB

Ved ω_{45} er det en forsterkning i systemet, altså er $|h(j\omega)| > 1 > 0$ dB

Vet at dette er et annen ordens system, og at vi derfor har $\xi < 0.7$



9) $m = 1440$ kg

$K_f = 10$

Vi skal ha $q = 1$:

Løser at D fra

$$q = \frac{D}{\sqrt{K_f \cdot m} \cdot 2}$$

$$D = q \cdot \sqrt{K_f \cdot m} \cdot 2$$

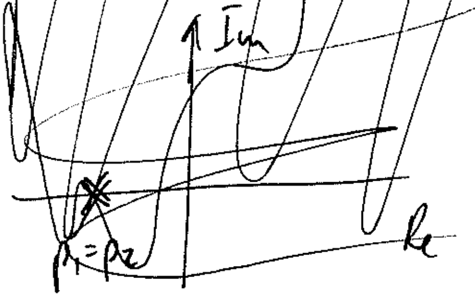
Vet at bilen har 4 hjul, og at $m = 360$ pr hjul.

$$D = 1 \cdot \sqrt{360 \cdot 10} \cdot 2$$

$$= 1 \cdot \sqrt{3600} \cdot 2$$

$$= 60 \cdot 2 = \underline{\underline{120 \ N/(m/s)}}$$

~~Systemets poler ved $\zeta = 1$ ligger på den reelle aksen, og er overlappende~~



g forts)

Siden

$$\zeta = \frac{D}{\sqrt{K_f \cdot m} \cdot 2}$$

ser vi at ζ blir mindre dess mer masse, eller passasjerer vi har i bilen.

Det betyr at vi vil få oversving hvis vi har lastet bilen med sjåfør/passasjerer og bagasje (noe vi alltid har)

Oppg 2

a)

$$h(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = \frac{K}{(Ts+1)s}$$

$$h(j\omega) = \frac{K}{(Tj\omega + 1)\, j\omega} = \frac{K}{-T\omega^2 + j\omega}$$

$$|h(j\omega)| = \frac{K}{\sqrt{(T\omega^2)^2 + \omega^2}}$$

$$\angle h(j\omega) = \div \operatorname{atan}\left(\frac{Im}{Re}\right) = -\operatorname{atan} \frac{\omega}{-T\omega^2}$$

$$= -\operatorname{atan}\left(\frac{1}{-\omega T}\right)$$

b) Polene finnes ved nevnepolynom $=0$

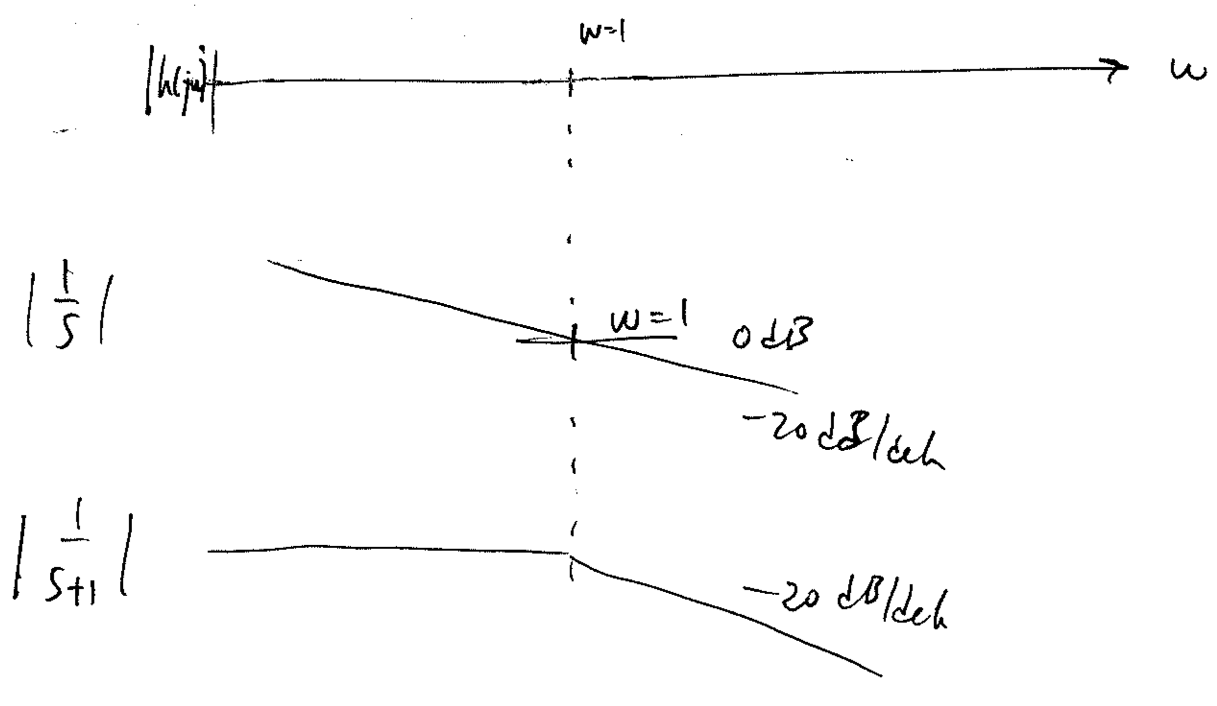
$$(Ts+1)\cdot s = 0$$

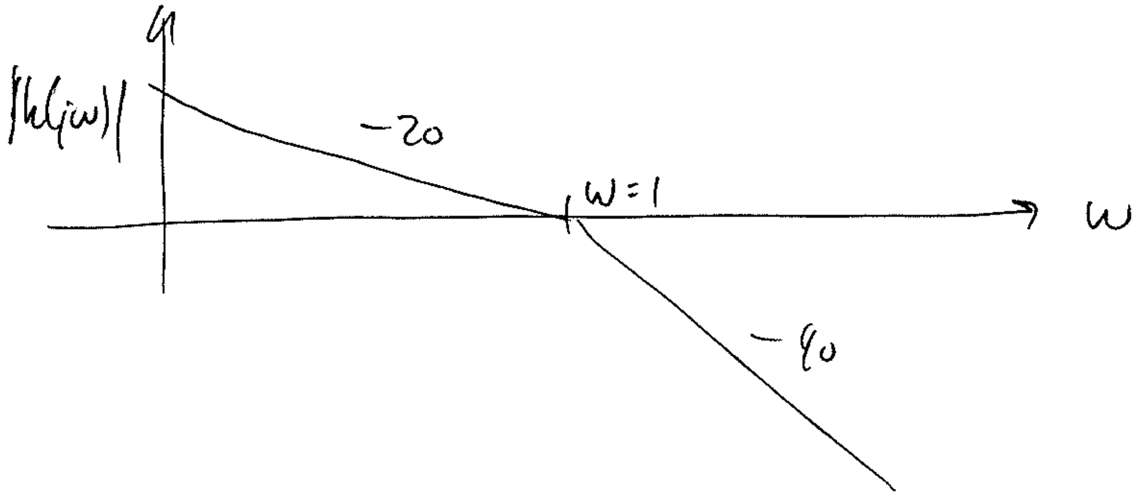
$s = 0 \quad \vee \quad s = -\frac{1}{T}$, altså poler i:

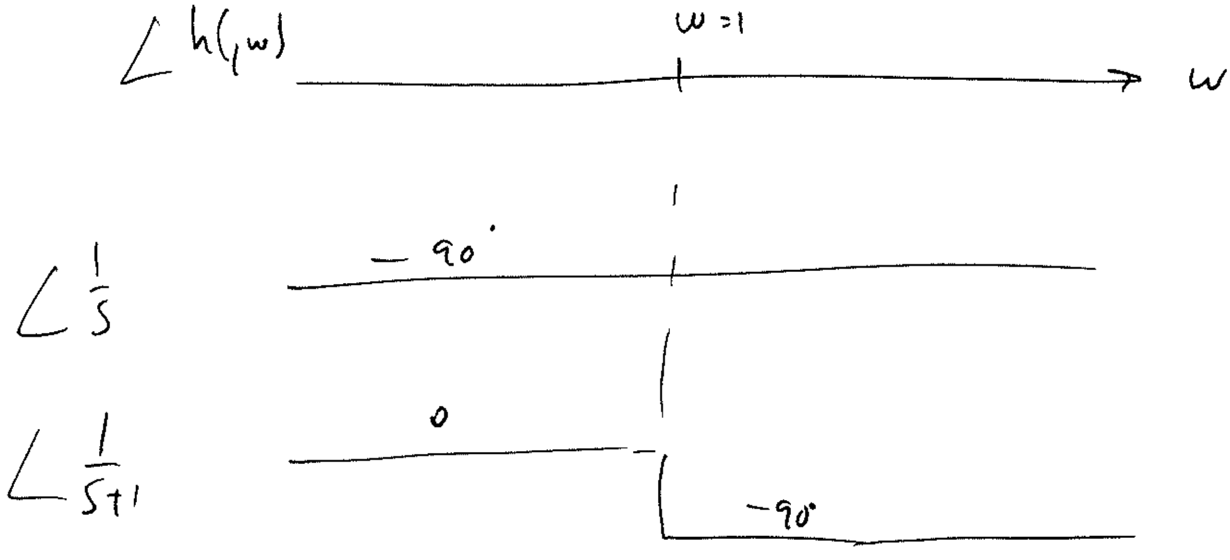
$p_1 = 0$ og $p_2 = -\frac{1}{T}$

Siden den ene polen ligger på reell akse i venstre halvplan og den andre i origo, har vi et marginalt stabilt system.

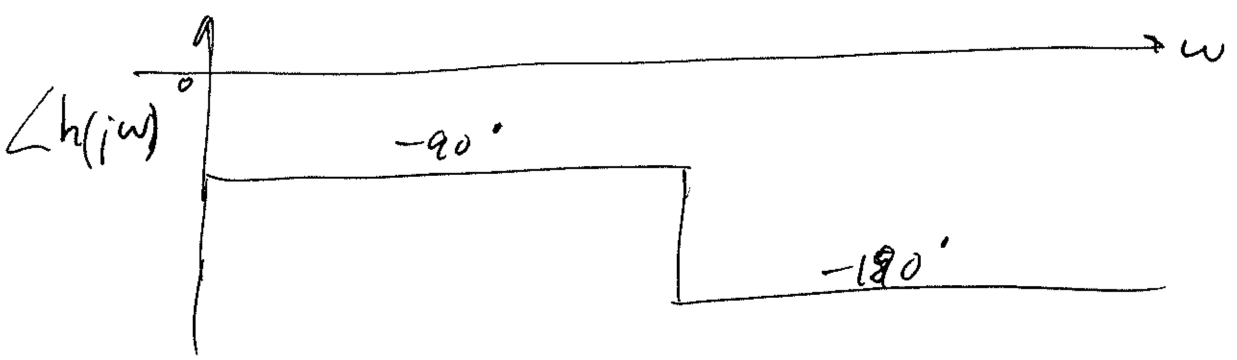
c) Splitter opp i integrator $1/s$ + 1.ordens system





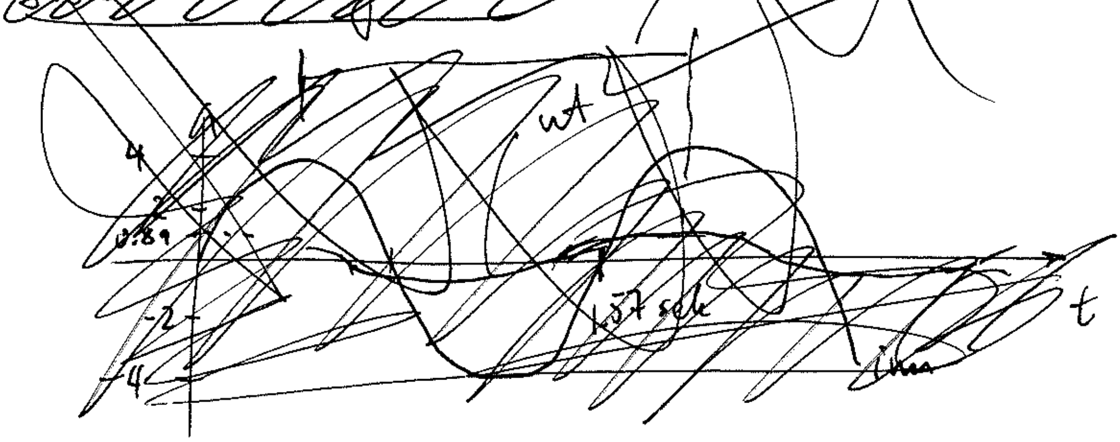


∠h(jw)
w = 1
w
∠1/s
-90°
∠1/(s+1)
0
-90°



w
0
∠h(jw)
-90°
-180°

~~Skisse av signalet~~



~~amplitude = $4 \cdot \frac{1}{2\sqrt{5}}$ = 0.89~~

d) $h_m(s) = 1$

Det er naturlig at systemet ikke har oversving fordi ellers ville plotteren passert punkter hvor den skal plotte noe, og den ville stått å svingt seg inn omkring dette punktet. Det er uønskelig.

For å vise at den ren P-reg. tilfredstille krav 3) trenger vi å finne $N(s)$.

Har $h_r(s) = K_p$

$$h_p(s) = \frac{1}{(s+1)s}$$

$$h_m(s) = 1$$

og $h_0(s) = h_r(s) \cdot h_p(s) \cdot h_m(s) = \frac{K_p}{(s+1)s}$

Videre er:

$$N(s) = \frac{1}{1+h_0(s)} = \frac{1}{1+\frac{K_p}{(s+1)s}} = \frac{(s+1)s}{(s+1)s+K_p}$$

$$= \frac{s^2+s}{s^2+s+K_p}$$

Benytt sluttverditeoremet på $N(s)$ ved sprang i ref: , antar $r(s) = \frac{1}{s}$

$$\lim_{s \to 0} s e(s) = \lim_{s \to 0} s \cdot N(s) \cdot r(s)$$

$$= \lim_{s \to 0} \cancel{s} \cdot \frac{s^2+s}{s^2+s+K_p} \cdot \frac{1}{\cancel{s}} = \underline{\underline{0}}$$

Grunnen til at en ren P-reg gir 0 i avvik er at prosessen inneholder en integrator e)

$$M(s) = \frac{y(s)}{r(s)} = \frac{h_0(s)}{1+h_0(s)}$$

$$= \frac{\frac{s^2+s}{s^2+s+K_p}}{1+\frac{s^2+s}{s^2+s+K_p}} = \frac{s^2+s}{s^2+s+K_p+s^2+s}$$

$$= \underline{\underline{\frac{s^2+s}{2s^2+2s+K_p}}}$$

denne skal sammenlignes med

$$h(s) = \frac{K}{\left(\frac{1}{w_0^2}\right)s^2 + \frac{2s}{w_0}\zeta + 1}$$

M(s) skrives:

$$M(s) = \frac{(s^2+s)/K_p}{\frac{2}{K_p}s^2 + \frac{2}{K_p}s + 1}$$

Som gir:

$$\frac{1}{w_0^2} = \frac{2}{K_p} \Rightarrow w_0 = \sqrt{\frac{K_p}{2}}$$

$$\frac{\cancel{2}\zeta}{w_0} = \frac{\cancel{2}}{K_p} \Rightarrow \zeta = \frac{w_0}{K_p} = \frac{\sqrt{\frac{K_p}{2}}}{\sqrt{K_p}\cdot\sqrt{K_p}} = \sqrt{\frac{1}{K_p \cdot 2}}$$

f) Krav 1) og 2) er motstridende

Krav 2) er avgjørende fordi her skal $\zeta = 1$

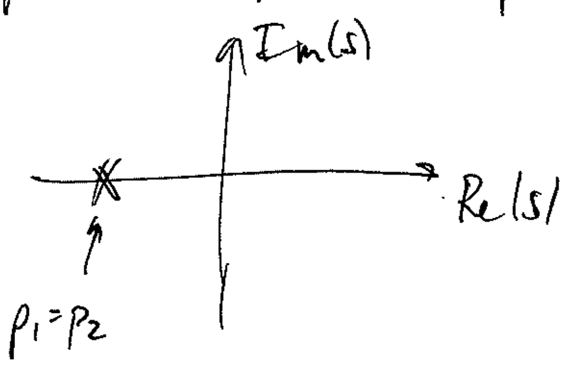
$$\zeta = \sqrt{\frac{1}{K_p \cdot 2}} = 1$$

$$\Downarrow$$

$$\underline{\underline{K_p = \frac{1}{2}}}$$

Responstiden er : $\underline{\underline{T_r}} \approx \frac{1.5}{\omega_0} = \frac{1.5}{\sqrt{\frac{1}{4}}} = \underline{\underline{0.75}}$

Polene ligger overlappende på reelle akse.



Verdien finnes ved å sette nevnerpolynom lik 0 :
$$\frac{2}{K_p} s^2 + \frac{2}{K_p} s + 1 = 0$$

$$4s^2 + 4s + 1 = 0$$

$$\Downarrow$$

$$(2s+1)(2s+1) = 0$$

$$s_1 = s_2 = -\frac{1}{2}$$

Begge polene ligger i $p_1 = p_2 = -\frac{1}{2}$

g) eget ark

Som vi ser må vi øke K_p med 5 dB, eller $20 \log x = 5$

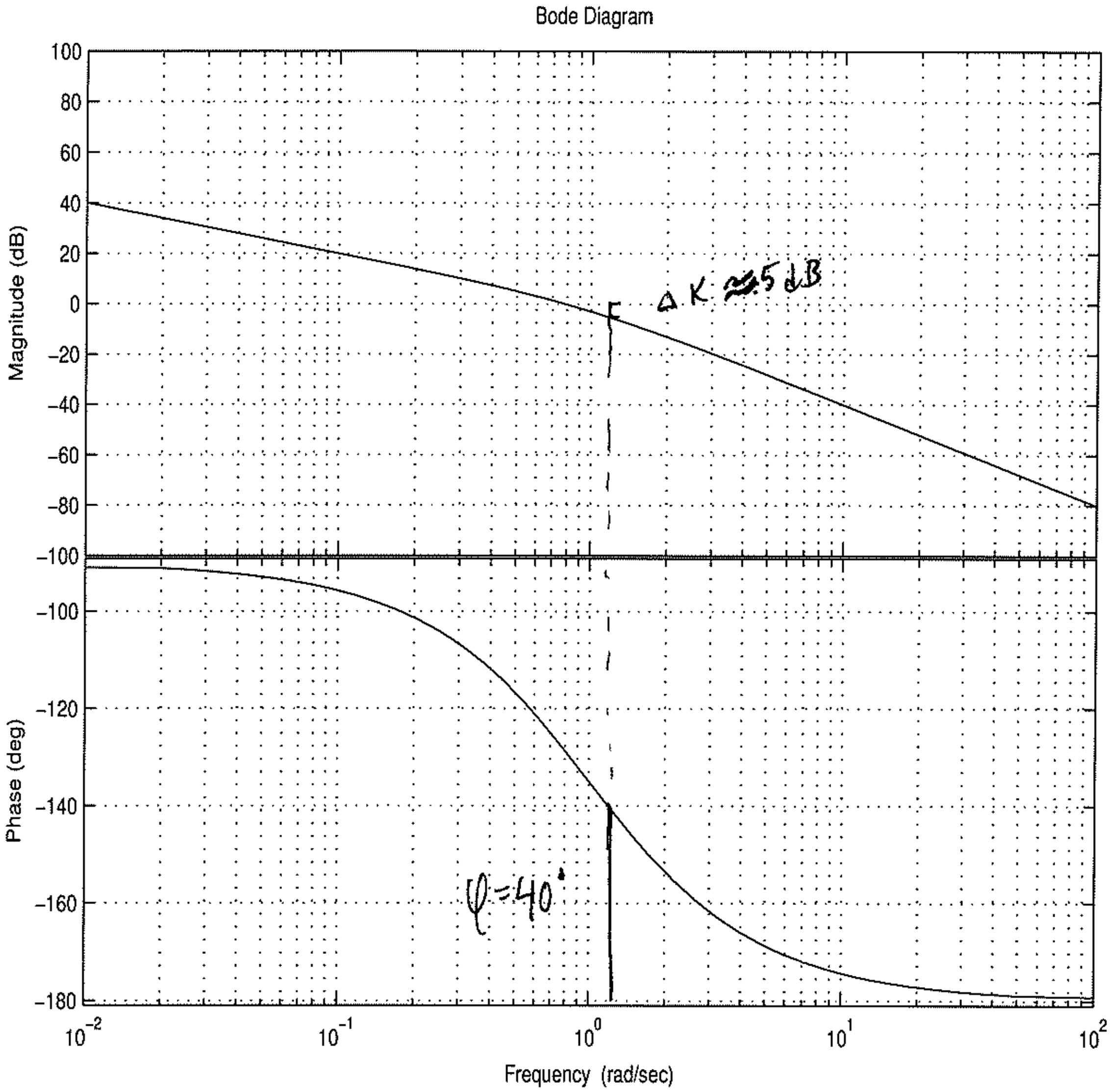
$$x \Rightarrow 1.77$$

Altså, den nye K_p må være 1.77.

Det betyr at $\zeta = \sqrt{\frac{1}{1.77 \cdot 2}} = 0.53$, altså et underdempet system.

$\Longrightarrow$ som vil gi oversving, krav 2) brytes k9

Fag: TE179, Reguleringsteknikk 1
Dato: 19. desember 2002
Kandidatnr:
Sidenr:



Figur 5: Bodeplot av sløyfetransferfunksjonen $h_0(j\omega)$ i oppgave 2g).

h)

far sluttverditeoremet av $N(s) \cdot r(s)$ igjen.

$$\lim_{s \to 0} s \cdot e(s) = s \cdot N(s) \cdot r(s)$$

$$= \cancel{s} \cdot \frac{s^2+s}{(s^2+s+K_p)} \cdot \frac{1}{s^{\cancel{2}}}$$

$$= \frac{s^2+s}{s^3+s^2+K_p s} \quad \begin{array}{l} \cdot \, 1/s \\ \cdot \, 1/s \end{array}$$

$$= \frac{s+1}{s^2+s+K_p} = \frac{1}{K_p}$$

Avvikt kan reduseres ved å øke K_p, eller skifte til PI regulator

Oppg 3)

a) Det vil ikke hjelpe.
Dette fordi ovnen står på hele tiden
uten å nå referansen. Kjøp større ovn.

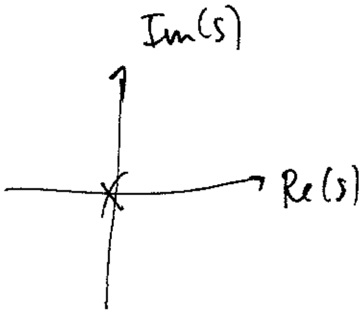
b) Frekvensrespons: Hvor mye ~~[illegible]~~ et sinussignal
blir forsterket og faseforskjøvet
gjennom et system.

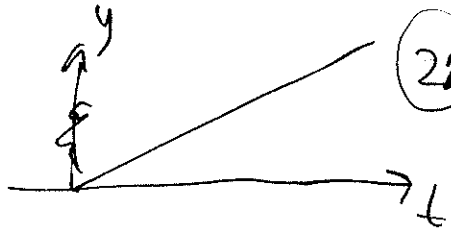
Impulsrespons: Tidsresponsen på utgangen
med impuls på inngang

Sprangrespons: Tidsresponsen på utgangen
med sprang på inngangen

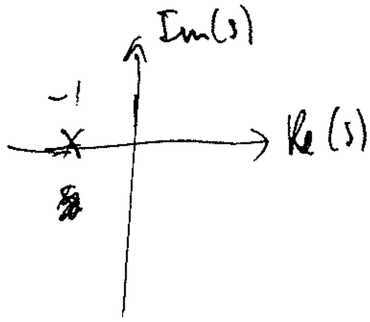
Begr. derivatvirkning: Benyttes for å filtrere
reguleringsavviket før det
blir derivert. Dette for
å unngå kraftig pådrags-
bruk

c) $\frac{1}{s}$

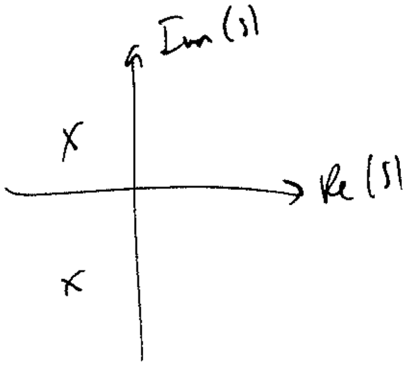




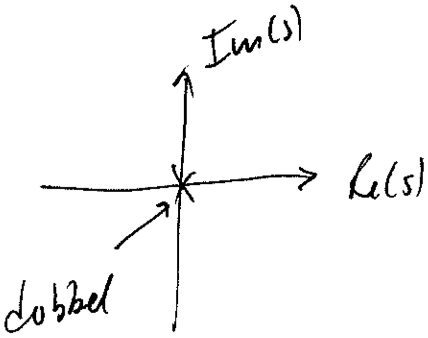
$\frac{1}{s+1}$

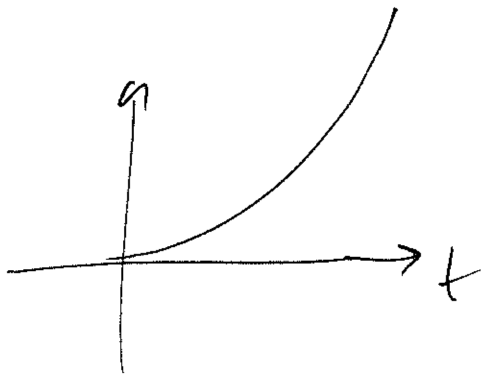


$\frac{1}{s^2+s+1}$



$\frac{1}{s^2}$





$\frac{s-1}{s^2+2s+1}$