

Universitetet i Stavanger

Det Teknisk-Naturvitenskapelige Fakultet

Eksamen i: MAT100 Matematiske metoder 1

Dato: 4. mars, 2021

Tid: 9:00-14:00 (5 timer)

Språk: Norsk, Bokmål

Tillatte hjelpemidler: Alle hjelpemidler.

Faglærer: Sigbjørn Hervik, tlf: 41581800

Oppgavesettet består av 6 oppgaver på 3 sider.

Deloppgaver a), b) etc., vektes likt.

∞ ∞ ∞ ∞

Oppgave 1

a) Gitt $z = 2 - 3i$ og $w = 3 - i$. Regn ut z^2 , $\bar{z}w$ og z/\bar{w} .

b) Finn alle løsningene til

$$z^3 + 1 - i = 0.$$

Skriv de på kartesisk form og tegn de inn i det komplekse planet.

c) La $w = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$. Finn w^{2021} og skriv det på kartesisk form.

Oppgave 2

Finn følgende integraler. Her må integrasjonsmetode og utregning vises!

a) $\int (\sqrt{2}x^{2/5} + \sin \pi x) dx.$ b) $\int \frac{(2 + 3 \ln x)^{2/3}}{x} dx.$ c) $\int \frac{x^2 - 2x}{(x + 2)(x^2 + 4)} dx.$

Oppgave 3

La a være en konstant. Vi definerer følgende funksjon:

$$f(x) = xe^{ax^2-x}.$$

- Anta først at $a = -1$. Bestem monotoniegenskapene til f . Bestem alle topp- og bunnpunkter.
- Anta nå at $a = 0$. La D være arealet avgrenset av grafen til f , x -aksen, og linja $x = 2$. Finn volumet av omdreingslegmet som framkommer ved å dreie D om x -aksen.
- Vis at for $a \geq \frac{1}{8}$ så er f monotont stigende for alle x .

Oppgave 4

I alle disse oppgavene må du vise utregning og hvilke metoder som brukes.

- Bruk metoden med integrerende faktor til å finne løsningen til differensialligningen:

$$y' + 2xy = e^{-x^2} \sin x.$$

- Finn den generelle løsningen på den inhomogene differensialligningen:

$$y'' + 4y' + 5y = x^2 + 2.$$

- La

$$g(x) = x^3 + \frac{1}{12x}.$$

Finn buelengden av grafen til g fra $x = 1$ til $x = 3$.

- Finn følgende integral ved å bruke $\tan(\theta/2)$ -substitusjon:

$$\int \frac{\cos \theta d\theta}{5 + 3 \cos \theta}$$

Oppgave 5

a) Bestem grensene, dersom de eksisterer:

$$\text{I) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x^2 + 1)}{x + 1}, \quad \text{II) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\sqrt{9x^2 + a} + 4}$$

b) La $f(x) = 2 + 3 \tan^{-1} x$. Finn ligningen for tangentlinja til f i $x = 0$.
Finn også ligningen til normalen til f i $x = 0$.

Oppgave 6

Onkel Flode skal lage en badestamp som skal fylles med vann. Han bestemmer seg for å bruke funksjonen $f(x) = x^4$ som utgangspunkt for den innvendige formen til badestampen. Ved å rotere funksjonen $f(x)$ om y -aksen får han den formen han ønsker. Vi lar (den innvendige) høyden til stampen være 1 meter.

- a) La D være området begrenset av $f(x) = x^4$, $y = 1$, og y -aksen. Finn volumet av omdreiningslegmet som fremkommer ved å dreie D om y -aksen. Her måles både x og y i meter.
- b) Onkel Flode bestemmer seg for å bruke hageslangen til å fylle opp stampen med vann. Vi antar at strømningshastigheten for vannet i hageslangen er konstant 7 liter per minutt (Husk at: 7 liter/min = 0.007 m³/min). Hvis dybden av vannet til enhver tid er h , og tiden måles i minutter, hvor mye forandrer h seg (altså: dh/dt) i det øyeblikk $h = 0.5$ meter? Hvor lang tid tar det å fylle opp hele badestampen?

♡ Lykke til! ♡