Universitetet i Stavanger

Det Teknisk-Naturvitenskapelige Fakultet

Eksamen i: MAT100 Matematiske metoder 1
Dato: 8. desember, 2021
Tid: 9:00-14:00 (5 timer)
Språk: Norsk, Bokmål
Tillatte hjelpemidler:
K. Rottmann, *Matematisk formelsamling*.
Enkel, godkjent kalkulator + Math Numeri 624.
Faglærer: Sigbjørn Hervik, tlf: 41581800

Oppgavesettet består av 6 oppgaver på 3 sider + Formelark.
Deloppgaver a), b) etc,. vektes likt.

$\infty \quad \infty \quad \infty \quad \infty$

Oppgave 1

a) Gitt $z = 5 + 2i$ og $w = -2 + i$. Regn ut z^2, $w/\bar{z}$ og $|z|^2$.

b) Finn alle 4. røttene til $-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$. Skriv de på kartesisk form og tegn de inn i det komplekse planet.

c) Beskriv området i det komplekse planet hvor følgende ligning er oppfylt:

$$|z - 2i| = 1.$$

Oppgave 2

Finn følgende integraler. Utregning må vises!

a) $\displaystyle\int \left(3\sqrt{x} - 5e^{7x}\right) dx.$ b) $\displaystyle\int \frac{\sin x}{\sqrt{2+3\cos x}} dx.$ c) $\displaystyle\int x^2 \ln x dx.$

d) $\displaystyle\int \frac{2x^2+7}{(x+2)^2(x-1)} dx.$ e) $\displaystyle\int 2x^3\sqrt{1+36x^4} dx.$

Oppgave 3

La D være området avgrenset av grafen til $f(x) = 2x^3$, $x = 1$ og den positive x-aksen. Vi dreier så området om x-aksen slik at en får et omdreiningslegme.

a) Finn volumet av dette omdreiningslegmet.

b) Finn overflatearealet av omdreiningslegmet.

Oppgave 4

a) Finn den generelle løsningen på den homogene differensialligningen:

$$y'' + 2y' + 10y = 0.$$

b) Finn den generelle løsningen på den inhomogene differensialligningen:

$$y'' + 2y' + 10y = x^2.$$

Oppgave 5

En kurve, c, i planet er implisitt definert ved

$$y \ln x + x^3 + y^3 = 9, \qquad x > 0.$$

a) Bruk implisitt derivasjon og finn et uttrykk for den deriverte $\frac{dy}{dx}$.

b) Vis at punktet $P(1, 2)$ ligger på kurva, og finn ligningen til tangenten til kurva gjennom punktet P.

Oppgave 6

Klara Ku har en sylinderforma tank full med vann. I bunnen er det ei kran som hun kan bruke for å tappe denne for vann. Når hun åpner krana er strømningsrata proposjonal med kvadratrota til dybden av vannet. Det vil si at volumet, $V(t)$, av vann i tanken som funksjon av tiden t, følger differensialligninga

$$\frac{dV}{dt} = -k\sqrt{h},$$

hvor h er dybden av vannet, og k er en konstant.

Anta videre at radien i grunnflata er $r = 0.5$ (i meter) og høyden av tanken er 1 (i meter). Tanken er først full med vann, og når $t = 0$ åpner Klara Ku krana og vannet tappes ut.

a) Vis at dette leder til initialverdiproblemet:

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{k}{\pi r^2}\sqrt{h}, \qquad h(0) = 1.$$

Løs så dette initialverdiproblemet.

b) Etter 10 minutter sjekker Klara Ku tanken og måler hvor mye vann det er igjen. Da er dybden av vannet halvert, det vil si $h = 0.5$ (i meter). Hvor lang tid tar det før tanken er tom for vann?

♡ God Jul! ♡